微积分下

No. 01

Date

例. 给定点 M、A、B、C. 求点 M 到由 A、B、C 确定的平面 π 的距离.

$$d = \frac{|\overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})|}{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|} \leftarrow \frac{\text{体积}}{\text{底面面积}}$$

若 $\vec{a}, \vec{b}$ 不共线且 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面. 则 $\exists$ 唯一 x, y, 使 $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

↑

$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$.

矢量三重积: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

↳ 结合律不成立: $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ 取 $\vec{i}, \vec{i}, \vec{j}$ 即可说明

→ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{0}$

平面方程
- 点法式: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$
- 一般式: $Ax + By + Cz + D = 0$
- 截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. → $\begin{cases} A = -\frac{D}{a} \\ B = -\frac{D}{b} \\ C = -\frac{D}{c} \end{cases}$

↳ $\vec{n} = \{A, B, C\}$ 为法矢.

点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为平面上一点.

叉乘: $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

$\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$.

$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ 共线.

$|\vec{a}\times\vec{b}| = S_{\square}$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No

Date

直线方程 { ① 一般式: $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$

② 点向式: $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ → $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上一点

(标准方程) $\vec{s}=\{l,m,n\}$ 为方向矢.

③ 参数方程: $\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt. \end{cases}$ $t\in(-\infty,+\infty)$.

↑ 令②=t.

④ 矢量方程: $\vec{r}-\vec{r}_0=t\vec{s}$

↳ $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$. $\vec{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$

M、M_0 为直线上的点.

叉乘 ⇒ 构造垂直于两向量的另一向量.

混合积 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=[\vec{b}\vec{c}\vec{a}]=[\vec{c}\vec{a}\vec{b}]$

$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=-[\vec{b}\vec{a}\vec{c}]=-[\vec{c}\vec{b}\vec{a}]=-[\vec{a}\vec{c}\vec{b}]$

$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

点 $P(x_1,y_1,z)$ 到平面 π 的距离：

$$d(P,\pi)=\frac{|\vec{P_0P}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

P_0 为平面 π 上任意一点

点 $P(x_1,y_1,z)$ 到直线 L 的距离：

$$d(P,L)=|\vec{P_0P}|\cdot\sin\theta=\frac{|\vec{P_0P}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$$

平面 π_1，π_2 间的夹角 θ：

注意是两个平面法矢所成的锐角 θ.

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

直线 L 与平面 π 的夹角 φ：

$$\because \varphi=\left|\frac{\pi}{2}-\langle\vec{s},\vec{n}\rangle\right|$$

$$\therefore \sin\varphi=|\cos\langle\vec{s},\vec{n}\rangle|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}||\vec{s}|}=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

KOKUYO

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

No.

Date

两直线共面 $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{s_1}\times\vec{s_2})=0$

↳ P_1, P_2 分别为直线 L_1, L_2 上的点.

两直线的夹角 φ:

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}=\frac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

$L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \vec{s_1}\cdot\vec{s_2}=0 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$

$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的数量投影: $|\vec{a}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\vec{a}\cdot\vec{b}^{\circ}$

异面直线的距离:

$$d(L_1,L_2)=|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{L_1}\times\vec{L_2})^{\circ}|=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{L_1}\times\vec{L_2})|}{|\vec{L_1}\times\vec{L_2}|}$$

其中 $\vec{L_1}\times\vec{L_2}\neq 0$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

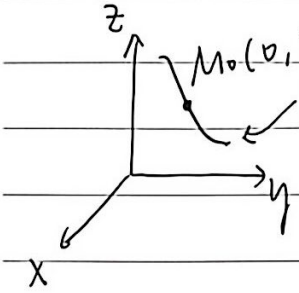
No. 03

Date

旋转曲面：

yoz 平面上曲线 $F(y,z)=0$ 绕 z 轴旋转一周

$\Rightarrow$ 曲面方程：$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$



曲面上一点 $M(x,y,z)$.

$\begin{cases} z_0=z \\ y_0^2=x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow y_0=\pm\sqrt{x^2+y^2}$

$\because y_0, z_0$ 满足 $F(y_0,z_0)=0$.

$\therefore F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$.

同理，xoy 平面上曲线 $F(x,y)=0$ 绕 y 轴旋转一周

$\Rightarrow$ 曲面 $F(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$.

例. 求 yoz 平面上的椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ 绕 z 轴旋转而成的曲面方程.

$F(y,z)=0 \Leftrightarrow \frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.

曲面：$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.

圆锥面：过原点直线 L 与 z 轴夹角为 α.

L 绕 z 轴旋转形成圆锥面 $z^2=(x^2+y^2)\cot^2\alpha$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

当a,b,c中有两个相等 ⇒ 旋转椭球面

全相等 ⇒ 球面.

单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

用$z=h$截 → 椭圆

$y=h$截 → 双曲线

$x=h$截 → 双曲线

双叶双曲面 $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

用$z=h$截 → 椭圆

$y=h$截 → 双曲线.

$x=h$截 → 双曲线.

椭圆抛物面 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

用$z=h$截 → 椭圆/圆.

$y=h$截 → 抛物线

$x=h$截 → 抛物线

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

双曲抛物面 $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

用 $z=h$ 截 → 双曲线（$h\neq 0$ 时为一对相交直线）.

$y=h$ 截 → 开口向上的抛物线

$x=h$ 截 → 抛物线（开口向下）.

椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$.

用 $z=h$ 截 → 椭圆

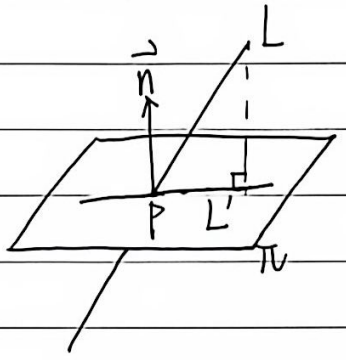
求 $L:\begin{cases}x-y+z+1=0\\x-y-z-1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi: x+y+z=0$ 上的投影直线方程.

L'.

找过 L' 的两个平面. 其一为 π.

另一为 L 与 L' 确定的平面 π_1.

→ 二元法求得 $\vec{n_1}$



$\vec{n_1}=\vec{n}\times\vec{l}$

$\vec{l}$ L 的方向矢.

又可知 L 与 π 的交点 P.

则可求得 π_1.

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 证明: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

(x,y) 在点 $(0,0)$ 的去心邻域.

给定 ε, 要找到 $\delta>0$, 当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, $\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| < \varepsilon$.

$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2} < \varepsilon$ $\Rightarrow$ 取 $\delta = 2\varepsilon$.

例. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$

令 $t = xy \to 0$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} y = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} \cdot 2 = 1\cdot 2 = 2$.

例. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin|x^3+y^3|}{x^2+y^2}$

由 $0 \le \frac{|\sin|x^3+y^3||}{x^2+y^2} \le \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \le \frac{|x^3|+|y^3|}{x^2+y^2} \le |x|+|y| \to 0$.

$\frac{|x^3|}{x^2+y^2} = \frac{x^2|x|}{x^2+y^2} \le |x|$

例. $L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{xy}$

$L = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{xy\ln(x^2+y^2)} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)}$

$0 \le |xy\ln(x^2+y^2)| \le |xy|\,|\ln(x^2+y^2)| \le \frac{x^2+y^2}{2}\,|\ln(x^2+y^2)|$

$= \frac{1}{2}\left|(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)\right|$

想办法化为单变量

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

令 $t=x^2+y^2\to 0^+$.

则 $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\ln t}{\frac{1}{t}}\overset{洛}{=}\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}=0$.

$\therefore L=e^0=1$.

例. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$ 不存在.

①. 取 $y=x$. 当 $x\to 0$, $y\to 0$.

$y_5=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x+x}=0$.

②. 取 $x+y=f(x)$. 当 $x\to 0$, $y=f(x)-x\to 0$.

$y_5=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x[f(x)-x]}{f(x)}$ [发现做不了...]

重新取 $x+y=x^n$. $x\to 0$. $y\to 0$.

$y_5=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x^n-x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{n+1}-x^2}{x^n}$

取 $n=2$. $y_5=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2}{x^2}=-1$.

两次路径极限不同. $\therefore \lim$ 不存在.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

连续: $\lim_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$, $P, P_0 \in \mathbb{R}^2$.

$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的偏导数: $f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_0,y=y_0}$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ 不可认为是 ∂f 与 ∂x 之商!!!

例. $PV = RT$. R 为常数. 证: $\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P} = -1$.

由 $P = \frac{1}{V}RT \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{1}{V^2}RT$

由 $V = \frac{R}{P}\cdot T \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{P}$

由 $T = \frac{V}{R}\cdot P \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{R}$

$\therefore$ 左边 $= -\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{P}\cdot\frac{V}{R} = \frac{-RT}{PV} = -1 =$ 右边. D.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$f(x,y)$ 在点 P_0 可微 $\Leftrightarrow$ $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$. $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

$A\Delta x + B\Delta y$ 全微分 dz.

可微的二元函数必连续.

若 $z = f(x,y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微，则偏导数 $f_x(x_0,y_0)$、$f_y(x_0,y_0)$ 均存在，且 $df(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y$.

若 f_x, f_y 存在且连续，则 $f(x,y)$ 可微. ★

★ 仅 f_x, f_y 存在

可微 ⇒ 偏导存在 ∧ 偏导连续

$dz = z_x dx + z_y dy$

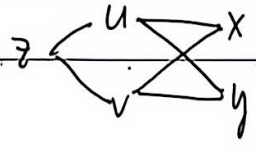
$du = u_x dx + u_y dy + u_z dz$

$$\begin{cases} d(\alpha u + \beta v) = \alpha du + \beta dv. \\ d(uv) = v du + u dv \\ d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} \quad v \neq 0. \end{cases}$$

$z = f(u(x), v(x))$.

全导数 $\frac{dz}{dx} = f_u \cdot \frac{du}{dx} + f_v \cdot \frac{dv}{dx}$.

$z = f(u(x,y), v(x,y))$. 则 $\begin{cases} z_x = f_u \cdot u_x + f_v \cdot v_x \\ z_y = f_u \cdot u_y + f_v \cdot v_y. \end{cases}$



链式法则.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

推广：

$z = f(u_1, u_2, \cdots, u_m)$

$u_i = u_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

且 $\frac{\partial f}{\partial u_i}$、$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 均存在，$\frac{\partial f}{\partial u_i}$ 连续。

则 $\frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ $(1 \le j \le n)$.

$$df(u_1, u_2, \cdots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(u_1, u_2, \cdots, u_n)\, du_i.$$

$z = f(u_1, u_2)$. $\Rightarrow$ $dz = z_{u_1} du_1 + z_{u_2} du_2$.

$u_1 = u_1(x, y)$. $u_2 = u_2(x, y)$

对 $z = f(u, v)$. $u = u(x, y)$. $v = v(x, y)$

$$\begin{aligned} dz &= z_u du + z_v dv = z_u(u_x dx + u_y dy) + z_v(v_x dx + v_y dy) \\ &= (z_u u_x + z_v v_x)\, dx + (z_u u_y + z_v v_y)\, dy \\ &= z_x dx + z_y dy \end{aligned}$$

其一些记号：以 $f(x, y) = x^2 y^3$ 为例。

$f_1' = f_x(x, y) = 2xy^3$. [对 x 求一阶偏导]

$f_2' = f_y(x, y) = 3x^2 y^2$. [对 y 求一阶偏导]

f_2' 对第二个位置里的整体求偏导。

$f_{11}'' = f_{xx} = 2y^3$. $f_{12}'' = f_{xy} = 6xy^2$ $f_{21}'' = f_{yx} = 6xy^2$. $f_{22}'' = f_{yy} = 6x^2 y$.

若为复合求法则：e.g. $f(u, v)$. $u = 2x$, $v = 3y$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_1' \cdot u_x + f_2' \cdot v_x = f_1' \cdot 2 + f_2' \cdot 0$$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

隐函数存在定理：

若 ① $F(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有连续偏导

② $F(x_0,y_0)=0$，即 P_0 在 $F(x,y)$ 图像上

③ $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ ← 右侧保一个 x 只对应一个 y

则右侧唯一的可微函数 $y=f(x)$，有以下性质：

① $y_0=f(x_0)$

② $F(x,f(x))=0$

③ $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ ☆

例. 验证方程 $\sin y+e^x-xy-1=0$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有唯一隐函数 $y=y(x)$，并求 $y'(0)$，$y''(0)$.

$F(x,y)=\sin y+e^x-xy-1$.

∵ ① 有连续偏导

② $F(0,0)=0$

③ $F_y(0,0)=1\neq 0$

∴ 有隐函数 $y=y(x)$.

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{e^x-y}{\cos y-x} \quad \therefore y'(0)=-\frac{e^0-0}{\cos 0-0}=-1$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{y-e^x}{\cos y-x}\right)=\frac{(y'-e^x)(\cos y-x)-(y-e^x)(-y'\sin y-1)}{(\cos y-x)^2}$$

注意，若直接求导，

要记得 y 是关于 x 的函数，

此时不可将 y 视作常量

$$\therefore y''(0)=\frac{(-1-1)(1-0)-(0-1)(1\cdot 0-1)}{(1-0)^2}$$

$$=-3.$$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 设方程 $f(xy, y^2, x-z)=0$ 确定二元函数 $z=z(x,y)$. 其中 f 有连续偏导数. 求 z_x, z_y.

[法一]. $z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{f_1' \cdot y + f_3'}{-f_3'} = \frac{yf_1' + f_3'}{f_3'}$

$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{f_1' \cdot x + f_2' \cdot 2y}{-f_3'} = \frac{xf_1' + 2yf_2'}{f_3'}$.

$f_3' \neq 0$.

[法二]. 两边对 x 求偏导:

$f_1' \cdot \frac{\partial(xy)}{\partial x} + f_2' \cdot \frac{\partial y^2}{\partial x} + f_3' \cdot \frac{\partial(x-z)}{\partial x} = 0$

注意, z 是 x 的函数, 即 $z=z(x,y)$.

$\therefore f_1' \cdot y + f_2' \cdot 0 + f_3' \cdot (1 - z_x) = 0$

$\Rightarrow z_x = \frac{yf_1' + f_3'}{f_3'}$. 同理, 两边对 y 求偏导可得 z_y.

[法三] 两边同时求全微分:

$df = f_1' d(xy) + f_2' d(y^2) + f_3' d(x-z) = 0$.

$\therefore f_1'(y\,dx + x\,dy) + f_2' \cdot 2y\,dy + f_3'(dx - dz) = 0$.

$\Rightarrow (yf_1' + f_3')dx + (xf_1' + 2yf_2')dy - f_3' dz = 0$

$\therefore dz = \underbrace{\frac{(yf_1' + f_3')}{f_3'}}_{z_x} dx + \underbrace{\frac{(xf_1' + 2yf_2')}{f_3'}}_{z_y} dy$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

由方程组确定的隐函数：

$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ $u(x,y)$. $v(x,y)$.

有：$J=\begin{vmatrix} Fu & Fv \\ Gu & Gv \end{vmatrix}$ ← $=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} Fx & Fv \\ Gx & Gv \end{vmatrix}. \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} Fu & Fx \\ Gu & Gx \end{vmatrix}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} Fy & Fv \\ Gy & Gv \end{vmatrix}. \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\begin{vmatrix} Fu & Fy \\ Gu & Gy \end{vmatrix}.$$

↑ 用 y 换 J 中含 v 的项.

例. 设函数 $y=y(x)$, $z=z(x)$ 由方程 $x+y+z=0$. $x^2+y^2+z^2=1$ 确定.
求 $\dfrac{dy}{dx}$. $\dfrac{dz}{dx}$.

[法一] $\begin{cases} F(x,y,z)=x+y+z=0 \\ G(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0. \end{cases}$

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix} Fy & Fz \\ Gy & Gz \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2y & 2z \end{vmatrix}=2(z-y).$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}=-\frac{1}{J}\cdot\begin{vmatrix} Fx & Fz \\ Gx & Gz \end{vmatrix}=\cdots=\frac{x-z}{z-y}$$

用 x 换 y

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}=\frac{1}{J}\cdot\begin{vmatrix} Fy & Fx \\ Gy & Gx \end{vmatrix}=\cdots=\frac{y-x}{z-y}.$$

KOKUYO
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$y=y(x),\ z=z(x)$.

[注意] 对 $x+y+z=0$ 两边求导：$1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0$. (1)

对 $x^2+y^2+z^2-1=0$ 两边求导：$2x+2y\frac{dy}{dx}+2z\frac{dz}{dx}=0$.

$\Rightarrow x+y\frac{dy}{dx}+z\frac{dz}{dx}=0$ (2).

把(1)代入(2)：$x+y\frac{dy}{dx}+z\cdot\left(-1-\frac{dy}{dx}\right)=0$

解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{x-z}{z-y}$.

同理，可得 $\frac{dz}{dx}$.

例. $\begin{cases} xu-yv=0 \\ yu+xv-1=0. \end{cases}$ $u=u(x,y),\ v=v(x,y)$. 求 $u_x,\ v_x$.

对x偏导(y视作常数)：$\begin{cases} u+xu_x-yv_x=0 \\ yu_x+v+xv_x=0. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} xu_x-yv_x=-u \\ yu_x+xv_x=-v \end{cases}$

由Cramer法则，$\begin{cases} u_x=\dfrac{\begin{vmatrix} -u & -y \\ -v & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} \\ v_x=\dfrac{\begin{vmatrix} x & -u \\ y & -v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}} \end{cases}$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$z=z(x,y)$ 满足:

例. $\begin{cases} x=ue^v \\ y=u\sin v \\ z=uv. \end{cases}$ 求 z_x, z_y.

3个方程, 5变元. → 确定3个二元函数 $z=z(x,y)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$.

方程组对 x 求导: $\begin{cases} 1=u_x e^v + ue^v \cdot v_x \\ 0=u_x \sin v + u\cos v \cdot v_x \\ z_x = u_x v + u v_x \end{cases}$

求解 u_x, v_x, z_x $\Rightarrow$ $\begin{cases} u_x = \dfrac{\cos v}{e^v(\cos v - \sin v)} \\ v_x = \dfrac{-\sin v}{ue^v(\cos v - \sin v)} \\ z_x = \dfrac{v\cos v - \sin v}{e^v(\cos v - \sin v)} \end{cases}$

同理, 可求得 z_y

例. $F(x,y,z)=0$ 确定二元隐函数 $z=z(x,y)$. 求 z_x. z_{xx}.

对 x 求导: $F_x + 0 + F_z \cdot z_x = 0$

$\therefore z_x = \dfrac{-F_x}{F_z}$.

$$z_{xx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{-F_x}{F_z}\right) = -\frac{(F_{xx}+F_{xz}\cdot z_x)F_z - F_x\cdot(F_{zx}+F_{zz}\cdot z_x)}{F_z^2}$$

$$= \cdots\cdots = \frac{2F_xF_zF_{xz} - F_{xx}F_z^2 - F_{zz}F_x^2}{F_z^3}$$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. $y=f(x,t)$. $F(x,y,t)=0$ 确定隐函数. 其中 f,F 有连续偏导数. 求 $\frac{dy}{dx}$

2等式. 3变量 → 确定两个一元函数 $y=y(x)$. $t=t(x)$.

自变量题目给出.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f_x + f_t \cdot \frac{dt}{dx} \\ F_x + F_y \cdot \frac{dy}{dx} + F_t \cdot \frac{dt}{dx} = 0 \end{cases}$$

解得 $\frac{dy}{dx} = \frac{f_x F_t - f_t F_x}{F_t + f_t F_y}$

方向导数: $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{n}} = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{f(x_0+at, y_0+bt, z_0+ct) - f(x_0, y_0, z_0)}{t \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

称为 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 沿方向 $\vec{n}=(a,b,c)$ 的方向导数.

设 $\vec{n}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$.

则 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{n}} = f_x(P_0)\cos\alpha + f_y(P_0)\cos\beta + f_z(P_0)\cos\gamma$.

$= \{f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)\} \cdot \vec{n}^0$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

梯度 $\operatorname{grad} f(P_0) = \nabla f(P_0) = \{f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)\}$.

设 L: $f(x,y)=c$ 为 $f(x,y)$ 的等值线，则 $\nabla f(P_0)$ 是 L 上点 P_0 处的法线方向，且从数值低的等值线指向数值高的等值线.

曲线 L: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t). \end{cases}$

矢量函数: $r=r(t)=\{x(t), y(t), z(t)\}$.

→ 切矢量 $r'(t)=\frac{dr}{dt}=\{x'(t), y'(t), z'(t)\}$.

若 $r(t)$ 存在且连续，且 $r'(t)\neq 0$. 则称 L 为光滑曲线.

对曲线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

过 M_0 的切线: $\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}$

过 M_0 的法平面: $x'(t_0)\cdot(x-x_0) + y'(t_0)\cdot(y-y_0) + z'(t_0)\cdot(z-z_0)=0$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

证：$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=bt \end{cases}$ 在任意点处切线与z轴成定角.

$\vec{r}'(t)=\{-a\sin t, a\cos t, b\}$.

$\vec{n_z}=(0,0,1)$.

$\therefore \cos\langle \vec{r}'(t), \vec{n_z}\rangle = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 为定值.

曲面Σ在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处法矢量 $\vec{n}=\text{grad}\,F(P_0)=\{F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)\}$

切平面：$F_x(P_0)\cdot(x-x_0)+F_y(P_0)\cdot(y-y_0)+F_z(P_0)\cdot(z-z_0)=0$.

法线：$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}$.

空间曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在点P_0的切矢量 $\vec{\tau}=\nabla F(P_0)\times\nabla G(P_0)$.

面$F(x,y,z)=0$法矢：$\vec{n_1}=\nabla F(P_0)$.

面$G(x,y,z)=0$法矢：$\vec{n_2}=\nabla G(P_0)$.

$\vec{\tau}$与$\vec{n_1}$、$\vec{n_2}$均垂直 → 由叉乘相连.

法矢量永远垂直于该等值面上任一曲线的切向量.

证：等值面：$f(x,y,z)=C$.

$\therefore$法矢量：$\vec{n}=\text{grad}\,f(P_0)=\{f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)\}$

等值面上曲线：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ → 切向量 $\vec{\tau}=\{x'(t), y'(t), z'(t)\}$.

由曲线上所有点均在等值面上：$f(x(t),y(t),z(t))=C$.

两边对t求导 $\Rightarrow f_x\cdot x'(t)+f_y\cdot y'(t)+f_z\cdot z'(t)=0$. 即 $\vec{n}\cdot\vec{\tau}=0$. 口.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

极值点 { 不可导点（f_x, f_y 至少一个不存在）.
驻点（$\nabla f(P_0)=0$）.

$(0,0)$ 为 $z=xy$ 的驻点，但不是极值点. $f(0,0)$ $f(0,0)$.
∵ 取 $\varepsilon>0$. $f(\varepsilon,\varepsilon)>0$. $f(\varepsilon,-\varepsilon)<0$
∴ 不是极值点.

$P_0(x_0,y_0)$ 为 f 在 D 内的驻点. f 在 D 内有二阶连续偏导数.
记 $A=f_{xx}(P_0)$. $B=f_{xy}(P_0)$. $C=f_{yy}(P_0)$. $\Delta=AC-B^2$.
当 $\Delta>0$. $A>0$.（或 $C>0$）. P_0 为 f 的极小值点.
当 $\Delta>0$. $A<0$.（或 $C<0$）. P_0 为 f 的极大值点.
当 $\Delta<0$. P_0 不是 f 的极值点.

求极值流程：
① 找不可导点
② 由 $f_x=0$, $f_y=0$ 否定驻点.

例. 求内接于半径 R 的球体中体积 Max 的长方体.
记第一卦限顶点坐标 (x,y,z).
则 $V=8xyz=8xy\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

求最值：step 1. 求 V_x. V_y. $V_x=8y\left(\sqrt{R^2-x^2-y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)$

$V_y=8x\left(\sqrt{R^2-x^2-y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)$

step 2. 令 $V_x=0$. $V_y=0$ $\Rightarrow x=y=\frac{R}{\sqrt{3}}$. $\Rightarrow z=\frac{R}{\sqrt{3}}$.

∴ 唯一驻点 $\left(\frac{R}{\sqrt{3}},\frac{R}{\sqrt{3}},\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$ 且没有不可导点.

∵ $x\in(0,R)$, $y\in(0,R)$, $z\in(0,R)$.
∴ 边界无最值. ∴ 唯一驻点处有 Max.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

Lagrange 乘数法：（目标函数　约束条件）

[条件极值] 求 $f(x,y)$ 在条件 $g(x,y)=0$ 下的极值.

构造 Lagrange 函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$.

求 $L(x,y,\lambda)$ 的驻点，对应的 (x,y) 即为可能的最优点.

↳ $L_x=0,\ L_y=0,\ L_\lambda=0$.

若 $f(x,y,z)=0$，两个约束 $g(x,y,z)=0,\ h(x,y,z)=0$.

则 Lagrange 函数：$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z)$.

令 $L_x=0,\ L_y=0,\ L_z=0,\ L_\lambda=0,\ L_\mu=0$，解方程组即可.

二阶 Taylor 公式：点 $P_0(x_0,y_0)$ 处：

$$f(x,y)=f(P_0)+f_x(P_0)\cdot h+f_y(P_0)\cdot k+\frac{1}{2}f_{xx}(P_0)\cdot h^2+f_{xy}(P_0)\cdot hk+\frac{1}{2}f_{yy}(P_0)\cdot k^2+o(\rho^2)$$

其中 $h=x-x_0,\ k=y-y_0,\ \rho=\sqrt{h^2+k^2}$.

例. 已知 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，$u(x,y)\in C^2$（↳ 有连续的二阶偏导）将方程 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 转换为以 r,θ 为自变量的形式.

$$u_x=u_r\cdot r_x+u_\theta\cdot\theta_x=u_r\cdot\frac{x}{r}-u_\theta\cdot\frac{\sin\theta}{r}=u_r\cos\theta-u_\theta\cdot\frac{\sin\theta}{r}$$

由 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，知 $r_x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{r}=\cos\theta$.

(*)：由 $\tan\theta=\frac{y}{x}\Rightarrow\theta=\arctan\frac{y}{x}$，知 $\theta_x=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{-y}{x^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{-\sin\theta}{r^2}$

$\therefore\theta_x=\frac{-\sin\theta}{r}$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

对 u_x 再对 x 求偏导:

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial(u_r\cos\theta)}{\partial x} - \frac{\partial(u_\theta \frac{\sin\theta}{r})}{\partial x} \quad \cdot u_\theta = u_\theta(r,\theta)$$

$$= \frac{\partial u_r}{\partial x}\cdot\cos\theta + \frac{\partial\cos\theta}{\partial x}\cdot u_r - \frac{\partial u_\theta}{\partial x}\cdot\frac{\sin\theta}{r} - \frac{\partial(\frac{\sin\theta}{r})}{\partial x}\cdot u_\theta$$

$u_r = u_r(r,\theta)$ ⟶

$$= \left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\cdot r_x + \frac{\partial u_r}{\partial\theta}\cdot\theta_x\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta}\cdot\theta_x\right)\cdot u_r$$

$$- \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\cdot r_x + \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\cdot\theta_x\right)\cdot\frac{\sin\theta}{r} - \frac{\frac{\partial\sin\theta}{\partial\theta}\cdot\theta_x\cdot r - \sin\theta\cdot r_x}{r^2}\cdot u_\theta$$

$$= u_{rr}\cos^2\theta - \frac{u_{r\theta}}{r}\sin\theta\cos\theta + \frac{u_r}{r}\sin^2\theta - \frac{u_{\theta r}}{r}\sin\theta\cos\theta$$

$$+ \frac{u_{\theta\theta}}{r^2}\sin^2\theta + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}u_\theta$$

∵ $u(x,y)$ 有连续的二阶偏导

∴ $u_{\theta r} = u_{r\theta}$.

$$\therefore u_{xx} = u_{rr}\cos^2\theta - \frac{2u_{r\theta}}{r}\sin\theta\cos\theta + \frac{u_r}{r}\sin^2\theta + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2}\sin^2\theta + \frac{2u_\theta}{r^2}\sin\theta\cos\theta$$

同理, $u_{yy} = u_{rr}\sin^2\theta + \frac{2u_{r\theta}}{r}\sin\theta\cos\theta + \frac{u_r}{r}\cos^2\theta + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2}\cos^2\theta - \frac{2u_\theta}{r^2}\sin\theta\cos\theta$.

$$\therefore u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 0.$$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 若可微函数 $f(x,y,z)$ 满足 $f(tx,ty,tz)=t^k\cdot f(x,y,z)$, $\forall t\in R$.
则称 f 为 k 次齐次函数.
证明 k 次齐次函数满足: $xf_x+yf_y+zf_z=kf$.
[方法: 对 t 求导.]
令 $u=tx$. $v=ty$. $w=tz$. 则有 $f(u,v,w)=t^k\cdot f(x,y,z)$.
两边对 t 求导: $f_u\cdot x+f_v\cdot y+f_w\cdot z=kt^{k-1}\cdot f(x,y,z)$. ↑ 对 t 来说是常数.
令 $t=1$. 则 $u=x$. $v=y$. $w=z$.
$\therefore xf_x+yf_y+zf_z=k\cdot f(x,y,z)$. 口.

例. 求曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ 在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴正向所成的角度.
由偏导数的几何意义, $\tan\theta=z_y=\dfrac{y}{z\sqrt{1+x^2+y^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

二重积分 $I=\iint_D f(x,y)\,d\sigma=\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta\sigma_i$

$\lambda\to 0$：使每个小区域面积尽可能小.

$f(P_i)$：该小区域高度.

$\Delta\sigma_i$：底面上一个小区域的面积

性质：① 线性. $\iint_D (af+bg)\,d\sigma=a\cdot\iint_D f\,d\sigma+b\iint_D g\,d\sigma$.

② 区域可加. 将区域 D 划分为两个子区域 D_1, D_2.

$$\iint_D f\,d\sigma=\iint_{D_1} f\,d\sigma+\iint_{D_2} f\,d\sigma.$$

③ 若 $f(x,y)\le g(x,y)$ (在区域 D 上).

则 $\iint_D f\,d\sigma\le\iint_D g\,d\sigma$.

$\Rightarrow -\iint_D |f|\,d\sigma\le\iint_D f\,d\sigma\le\iint_D |f|\,d\sigma$.

亦有: $\left|\iint_D f\,d\sigma\right|\le\iint_D |f|\,d\sigma$.

④ 若 $m\le f(x,y)\le M$. $(x,y)\in D$.

则 $m\sigma\le\iint_D f\,d\sigma\le M\sigma$.

↳ 特别地，由 $f(x,y)\equiv 1$. $\sigma=\iint_D d\sigma$

⑤ 中值定理.

若 $f(x,y)$ 在 D 上连续. 则 $\exists P\in D$. 使得:

$$\iint_D f\,d\sigma=f(P)\cdot\sigma.$$

$f(P)$：$f(x,y)$ 在区域 D 上的平均值.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

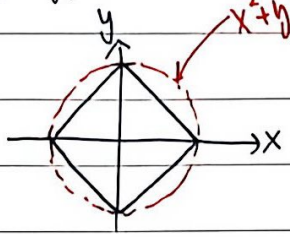
No.

Date

例. 区域 D: $|x|+|y|\le 1$. 求 $\iint_D (x^2+y^2-1)\,dx\,dy$ 的正负.

↳ 边界: $|x|+|y|=1$.

图像:



$x^2+y^2=1$. 在该圆内, $x^2+y^2-1<0$.

$dx\,dy=d\sigma>0$.

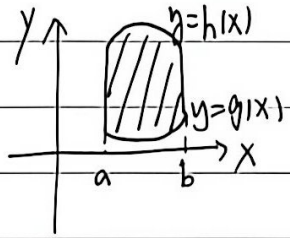
$\therefore \iint_D (x^2+y^2-1)\,dx\,dy < 0\cdot\sigma = 0$.

矩形区域.

$f(x,y)$ 在区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续, 则:

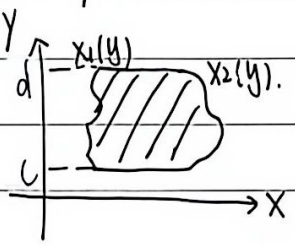
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \underbrace{\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy}_{\text{即 } \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx} = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

若 D 为 X 型区域: $x\in[a,b]$. $y\in[g(x),h(x)]$.



则 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$

若 D 为 Y 型区域: $y\in[c,d]$. $x\in[x_1(y),x_2(y)]$.



则 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$

若 $D=[a,b]\times[c,d]$ 且 $f(x)$, $g(y)$ 连续.

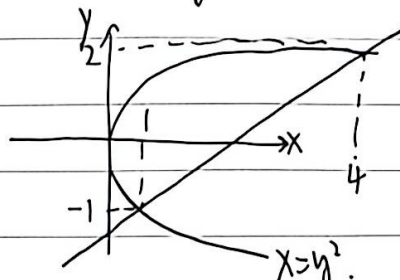
则 $\iint_D f(x)g(y)\,d\sigma = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_c^d g(y)\,dy$

例. $\iint_{[0,1]\times[0,2]} xy^2\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx \cdot \int_0^2 y^2\,dy = \frac{1}{2}\times\frac{8}{3} = \frac{4}{3}$.

Cam

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $I=\iint_D xy\,dx\,dy$. D由 $x=y^2$, $y=x-2$ 围成.



$-1\le y\le 2$. 左边界: $x=y^2$. 右边界: $x=y+2$

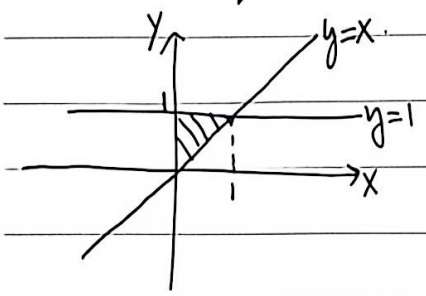
$I=\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2}^{y+2}xy\,dx$.

计算第一重积分时, y视作常数.

$=\int_{-1}^{2}y\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_{y^2}^{y+2}dy$

$=\cdots=\frac{45}{8}$

例. 求 $I=\iint_D e^{-y^2}dx\,dy$. D由 $y=x$, $y=1$ 和 y 轴围成



按 y 型做: 左边界: $x=0$. 右边界: $x=y$

$I=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx$

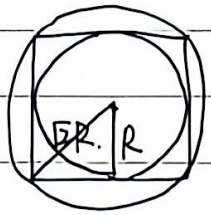
$=\frac{e-1}{2e}$

例. 求 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

令 $J(R)=\int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx$. $R>0$. ← 积分与被积变量的命名无关.

注意到, $J^2(R)=\int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx\cdot\int_{-R}^{R}e^{-y^2}dy=\iint_D e^{-x^2-y^2}dx\,dy$.

其中D为正方形. 边长为 $2R$.



可知 $I(R)\le J^2(R)\le I(\sqrt{2}R)$. ← 此处I为课本例子的函数.

即: $\pi(1-e^{-R^2})\le J^2(R)\le\pi(1-e^{-2R^2})$

由夹逼定理, $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\lim_{R\to\infty}J(R)=\sqrt{\pi}$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Data

$f(x,y)$ 在区域 D 连续，在极坐标下，$D: r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$.

则有：$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr$.

↗ 双纽线.

例. 计算曲线 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ 所围区域的面积.

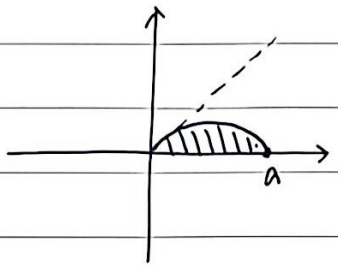
易知，曲线关于 x 轴，y 轴均对称. → 仅计第 D1 象限.

化为极坐标：$r^4 = a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) r^2$

$\therefore r^2 = a^2\cos 2\theta$

$\Rightarrow r = a\sqrt{\cos 2\theta}$

θ	r	直角坐标
0	a	$(a,0)$.
$\frac{\pi}{4}$	0	$(0,0)$



$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

$0 \le r \le a\sqrt{\cos 2\theta}$

求 D1 象限面积：$S_1 = \iint_{D_1} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\theta}} r\,dr = \cdots = \frac{a^2}{4}$.

$\therefore S = 4S_1 = a^2$.

极坐标下区域：$0 \le r \le r(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$.

围成的面积为：$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$.

区域：$r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$.

面积为：$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta)]\,d\theta$.

若 $(0,0)$ 在 D 内：$0 \le r \le r(\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$.

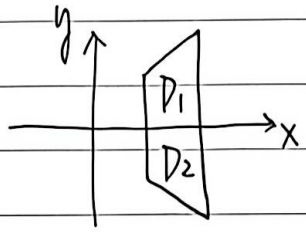
若 $(0,0)$ 在 D 外：$r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$.

若 $(0,0)$ 在 D 边界：$0 \le r \le r(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$.

Campus

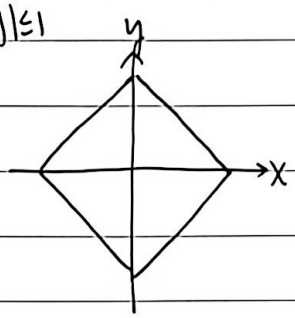
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

若积分区域 D 关于 x 轴对称，划分为 D_1、D_2，$f(x,y)=f(x,-y)$，即 f 关于 y 为偶函数，则 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy$.



若 f 关于 y 为奇函数，则 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$.

例. $\iint_{|x|+|y|\le 1} x^2 \sin y\,dx\,dy = 0$.



$f(x,y)=x^2\sin y \quad f(x,-y)=-x^2\sin y$

$\therefore f(x,y)=-f(x,-y)$.

↳ 关于 y 的奇函数

若区域 D_1，D_2 关于 $y=x$ 对称，则 $\iint_{D_1} f(x,y)\,d\sigma = \iint_{D_2} f(y,x)\,d\sigma$

若区域 D 关于 $y=x$ 对称，则有：

$$\iint_D g(x)\,d\sigma = \iint_D g(y)\,d\sigma.$$

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(y,x)\,d\sigma.$$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

变量代换：$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_G f[x(u,v), y(u,v)]\cdot|J|\,du\,dv$.

其中，$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$. $J=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$

↑

将函数在 u,v 平面上的区域 G 一一对应地变换到 x,y 平面上的区域 D.

若$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

有 $J=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$

$\Rightarrow$ 极坐标变换公式 $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$

例. 求 $I=\iint\limits_D x\,dx\,dy$. 其中 $D=\{(x,y)\mid (x-a)^2+(y-b)^2\le R^2\}$.

作平移变换：$u=x-a$. $v=y-b$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x=u+a \\ y=v+b \end{cases}$

则有 $G=\{(u,v)\mid u^2+v^2\le R^2\}$. $J=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$

$I=\iint\limits_G (u+a)\,du\,dv = \int_{-R}^{R} dv \int_{-\sqrt{R^2-v^2}}^{\sqrt{R^2-v^2}} (u+a)\,du = \cdots\cdots = \pi a R^2$.

↓

$= \iint\limits_G u\,du\,dv + \iint\limits_G a\,du\,dv$

↓ $\qquad\qquad$ $= a\,d\sigma = a\cdot\pi R^2$.

由于被积函数 $f(u,v)=u$ 是关于 u 的奇函数

∴ 该项为 0.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $I=\iint_D x^2\,dx\,dy$. 其中 D 为椭圆域 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$.

令 $\begin{cases} u=\frac{x}{a} \\ v=\frac{y}{b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=au \\ y=bv \end{cases}$

则有 $G: u^2+v^2\le 1$.

$$I=\iint_G a^2u^2\,d(au)\,d(bv)=\iint_G a^3b\,u^2\,du\,dv=a^3b\cdot\iint_G u^2\,du\,dv$$

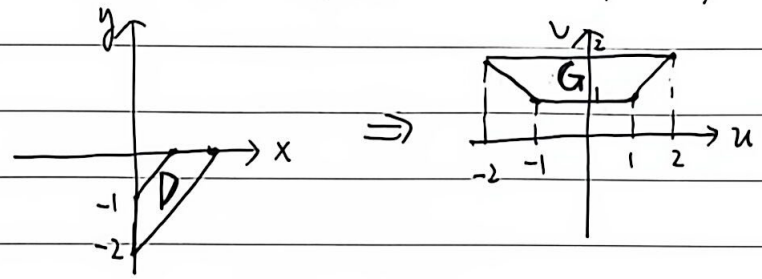
$$\therefore I=\frac{1}{2}a^3b\left(\iint_G u^2\,du\,dv+\iint_G v^2\,du\,dv\right)=\frac{1}{2}a^3b\cdot\iint_G (u^2+v^2)\,du\,dv.$$

转为极坐标: $u=r\cos\theta$, $v=r\sin\theta$ 有: $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le r\le 1$

$$\therefore I=\frac{1}{2}a^3b\cdot\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot r\,dr=\frac{1}{2}a^3b\cdot\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\,d\theta=\frac{\pi}{4}a^3b.$$

设 xy 平面上区域 D 为顶点为 $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$, $(0,-1)$ 的梯形.

(1). 求 $u=x+y$, $v=x-y$ 将 D 变换为 uv 平面上何区域.



(2). 求 $I=\iint_D e^{\frac{x+y}{x-y}}\,dx\,dy$

$$I=\iint_G e^{\frac{u}{v}}\cdot\left|\begin{matrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{matrix}\right|du\,dv=\frac{1}{2}\iint_G e^{\frac{u}{v}}\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_1^2 dv\int_{-v}^{v}e^{\frac{u}{v}}\,du=\frac{3e^2-3}{4e}.$$

KOKUYO

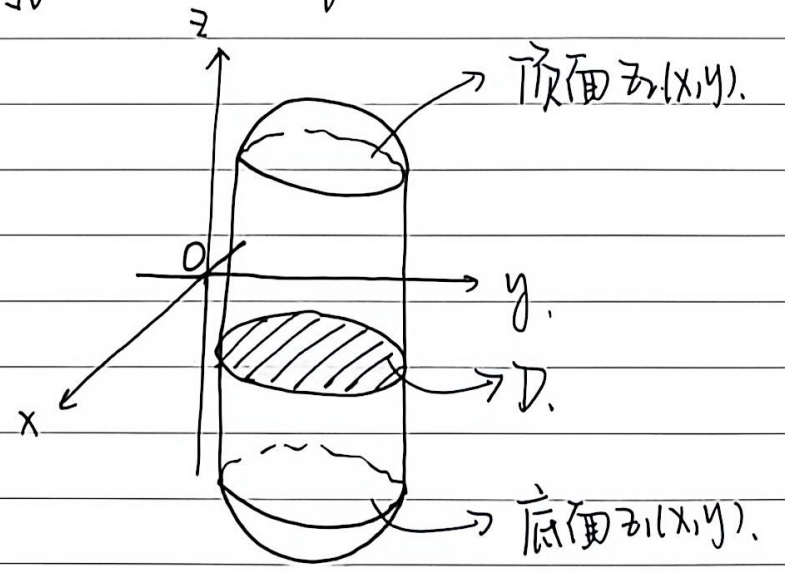
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

三重积分：$I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

设区域 Ω 表示为：$z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)$.　$(x,y)\in D$.

↑ xy 型区域，是一个有顶面、底面的立体.

则 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv=\iint_D dx\,dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$.



若 D 为 x 型区域：$a\le x\le b$.　$g_1(x)\le y\le g_2(x)$.

则 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dv=\int_a^b dx\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Wallis: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$.

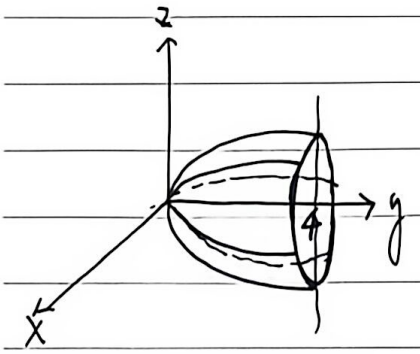
n为偶: $I=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$

n为奇: $I=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$.

截面法: 区域Ω介于平面$z=a$与$z=b$之间. 用平面$Z=z$截Ω, 得到的截面在xy平面上投影为D_z.

则 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV=\int_a^b dz\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy$.

例. 求$I=\iiint_V\sqrt{x^2+z^2}\,dV$. 其中$V$由抛物面$y=x^2+z^2$与平面$y=4$围成



$$I=\int_0^4 dy\iint_{D_y}\sqrt{x^2+z^2}\,dx\,dz$$

D_y: $x^2+z^2\le y$

$\to$ 以x为极坐标: $0\le\theta\le 2\pi$.

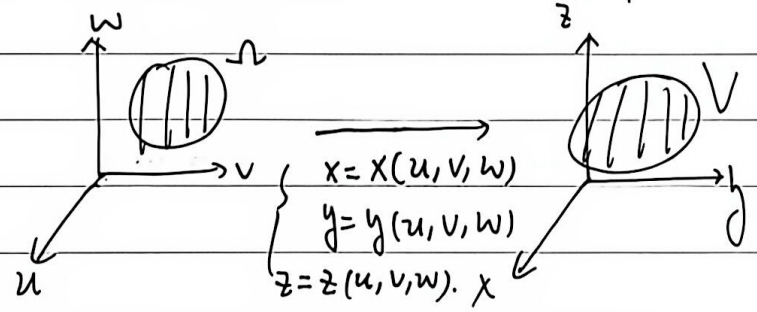
$0\le r\le\sqrt{y}$.

$$\therefore I=\int_0^4 dy\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{y}} r\cdot r\,dr$$

$$=\int_0^4 dy\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}}d\theta=\int_0^4\frac{2\pi}{3}y^{\frac{3}{2}}dy$$

$$=\frac{128\pi}{15}.$$

将u,v,w坐标下的空间Ω映射到x,y,z坐标下的空间V:



KOKUYO

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

则有：$\iiint_V f(x,y,z)\,dV = \iiint_\Omega f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)]\cdot|J|\cdot du\,dv\,dw$

其中 $J=\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0.$

考察柱面坐标代换：$(x,y,z) \to (r,\theta,z)$. 其中 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

$z=z.$

$\because J=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$

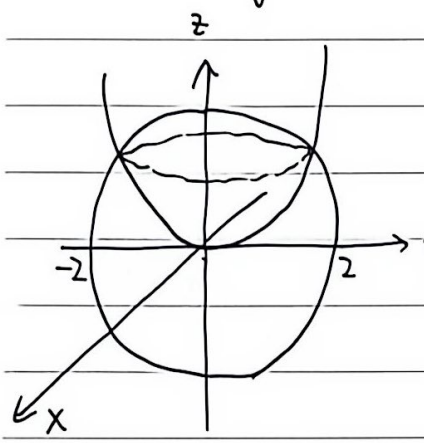
$\therefore dV = r\,dr\,d\theta\,dz.$

若区域 V：$\alpha\le\theta\le\beta$，$r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)$，$z_1(r,\theta)\le z\le z_2(r,\theta)$.

则有 $\iiint_V f(x,y,z)\,dV = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} r\,dr \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,dz.$

例. 求 $I=\iiint_V z\,dV$. 区域 V：$x^2+y^2+z^2\le 4$，$x^2+y^2\le 3z$.

↑球　↑旋转抛物面.



联立 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=3z \end{cases}$ 消去 z，得 $x^2+y^2=3$

即两曲面的交线.

$\therefore D: x^2+y^2\le 3$

$I=\iint_D dx\,dy \int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz = \cdots = \frac{13\pi}{4}.$

↑用极坐标代换.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

若积分区域空间 Ω 关于 xOz 面对称，

且 $f(x,y,z) = -f(x,-y,z)$ 即是关于 y 的奇函数

则积分值为 0.

球坐标代换：

点 $M(x,y,z)$. 记 $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. φ 为 $\overrightarrow{OM}$ 与 z 轴正方向夹角.

θ 为 OM 在 xy 平面上投影与 x 轴正方向夹角.

球坐标：(ρ, θ, φ)

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta \qquad z = \rho\cos\varphi.$$
$$y = \rho\sin\varphi\sin\theta$$

↓

转化为直角坐标 (x,y,z).

有 $J = -\rho^2\sin\varphi$.

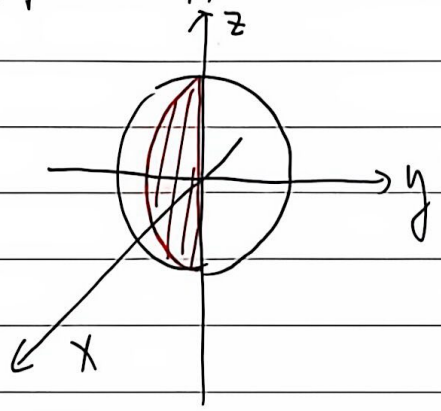
$$\therefore \iiint_V f\,dv = \iiint_V f\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi.$$

例. 求 $\rho = \sin\varphi\sin\theta$ 所代表的曲面.

同 $\times\rho$：$\rho^2 = \rho\sin\varphi\sin\theta$

即 $x^2+y^2+z^2 = y$ $\Rightarrow$ 球面.

例. 以下确定 $x^2+y^2+z^2 \le 9$ 的球坐标范围.



取一个半圆面，绕 z 轴转一圈.

$\therefore 0 \le \theta \le 2\pi$

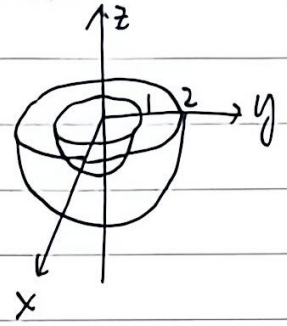
$0 \le \varphi \le \pi$

$0 \le \rho \le 3$

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

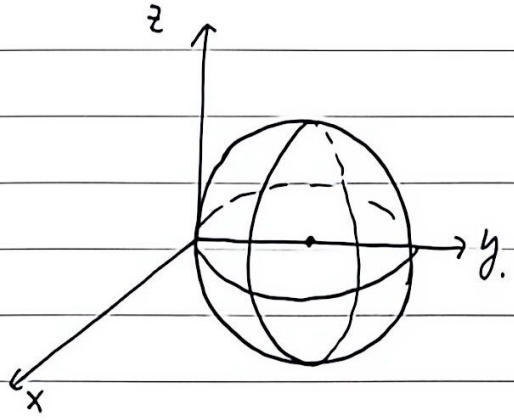
(2). 确定区域 $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$, $z \le 0$ 的球坐标范围.



$$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi. \\ 1 \le \rho \le 2. \end{cases}$$

(3). 确定区域 $x^2+y^2+z^2 \le 3y$ 的球坐标范围

球面: $x^2+(y-\frac{3}{2})^2+z^2=\frac{9}{4}$. ← $R=\frac{3}{2}$. 球心 $(0,\frac{3}{2},0)$.



$$\begin{cases} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$$

$\because x^2+y^2+z^2 \le \rho^2$, $3y = 3\rho\sin\varphi\sin\theta$

$\therefore \rho^2 \le 3\rho\sin\varphi\sin\theta$

$\Rightarrow \rho \le 3\sin\varphi\sin\theta$ ← 任取固定 θ, 切出一个圆面, 看 ρ 的大小范围.

$\therefore 0 \le \rho \le 3\sin\varphi\sin\theta$

[ρ 的大小与 φ, θ 均有关].

Campus

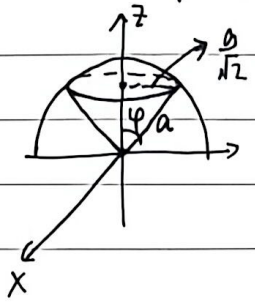
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dv$. $V: x^2+y^2+z^2 \le a^2,\ z \ge \sqrt{x^2+y^2}$.

球面　　锥面.

$0 \le \theta \le 2\pi$.

球面与锥面交线: 联立 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ z^2=x^2+y^2 \end{cases}$ 消 z $\Rightarrow x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$.



$\therefore 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

$0 \le \rho \le a$.

$x^2+y^2+z^2=\rho^2$.

$\therefore I=\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^a \rho^2 \cdot \rho^2 d\rho$.

若 $V: \rho_1(\theta,\varphi) \le \rho \le \rho_2(\theta,\varphi)$. $\varphi_1(\theta) \le \varphi \le \varphi_2(\theta)$. $\alpha \le \theta \le \beta$.

则 $\iiint_V f\,dv=\int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} \sin\varphi\, d\varphi \int_{\rho_1(\theta,\varphi)}^{\rho_2(\theta,\varphi)} f\cdot\rho^2 d\rho$.

例. 球体 $x^2+y^2+z^2 \le a^2$, $a>0$ 密度为 $\mu(x,y,z)=x^2+y^2$. 求球体质量.

$M=\iiint_V (x^2+y^2)\,dv$

x,y,z 等价地位

由球体 $\longrightarrow$ 轮换对称

$\iiint_V x^2\,dv=\iiint_V y^2\,dv=\iiint_V z^2\,dv$

$\therefore M=\frac{1}{3}\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dv+\frac{1}{3}\iiint_V 3(x^2+y^2+z^2)\,dv$

$=\frac{4}{3}\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dv=\frac{4}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^a \rho^2\cdot\rho^2 d\rho$

$=\cdots=\frac{16\pi a^5}{15}$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $\iiint_\Omega x\,dV$, $\iiint_\Omega y\,dV$. 其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2 \le x$.

∵ 当立体质量均匀时, $\bar{x} = \dfrac{\iiint_\Omega \mu x\,dV}{\iiint_\Omega \mu\,dV} = \dfrac{\iiint_\Omega x\,dV}{\iiint_\Omega dV}$

∴ $\iiint_\Omega x\,dV = \bar{x}\cdot\iiint_\Omega dV = \bar{x}\cdot V$.

由 Ω: $(x-\frac{1}{2})^2+y^2+z^2 \le \frac{1}{4}$. 均匀 → 形心 $(\frac{1}{2},0,0)$.

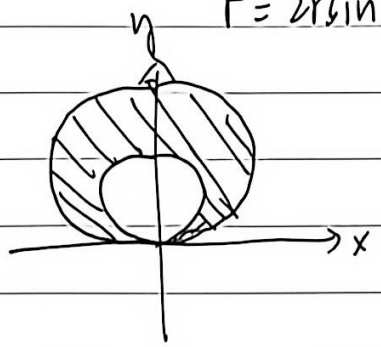
∴ $\iiint_\Omega x\,dV = \frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3}(\frac{1}{2})^3 = \frac{\pi}{12}$.

$\iiint_\Omega y\,dV = 0$

例. 求两圆 $r=2\sin\theta$, $r=4\sin\theta$ 围成的均匀薄片的质心.

↓

$r^2 = 2r\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2 = 2y \Rightarrow x^2+(y-1)^2 = 1$. 是圆.



显然, $\bar{x}=0$.

∵ $m = 3\mu\pi$.

∴ $\bar{y} = \dfrac{\iint_D \mu y\,d\sigma}{3\mu\pi} = \dfrac{\int_0^\pi d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} \mu r\sin\theta\cdot r\,dr}{3\mu\pi}$

$= \dfrac{7\mu\pi}{3\mu\pi} = \dfrac{7}{3}$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 70.

Date

例. $w=x^2yz$. $z=x^2+y^2$. $x+y+z=4$. 求 $x=1, y=1$ 时 $\frac{dw}{dx}$ 的值

∵ 3个方程，4个变量

∴ 确定3个函数（一元），1个自变量（题中需求 $\frac{dw}{dx}$，故取 x）

$\downarrow$

$w=w(x)$. $y=y(x)$. $z=z(x)$.

三个方程对 x 求导：$\begin{cases} \frac{dw}{dx}=2xyz+x^2z\frac{dy}{dx}+x^2y\frac{dz}{dx} \\ \frac{dz}{dx}=2x+2y\frac{dy}{dx} \\ 1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0 \end{cases}$

代入 $x=1, y=1, z=2$. $\Rightarrow$ $\begin{cases} \frac{dw}{dx}=4+2\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx} \\ \frac{dz}{dx}=2+2\frac{dy}{dx} \\ 1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0 \end{cases}$

解得 $\frac{dw}{dx}=2$.

例. 已知 $f(x,y)\in C^2$, $f(1,y)=0$. $f(x,1)=0$. $\iint_D f\,d\sigma=a$. $D=[0,1]\times[0,1]$.

求：$I=\iint_D xy f_{xy}\,d\sigma$.

对 x 求导：$f_1'\cdot 1+f_2'\cdot 0=0 \Rightarrow f_1'=0$.

↑ 就是 $f_x(x,1)$.

$I=\int_0^1 x\,dx\int_0^1 y f_{xy}\,dy$. 分部积分

$\because \int_0^1 y f_{xy}\,dy=\int_0^1 y\,df_x=\left[y f_x(x,y)\right]_0^1-\int_0^1 f_x(x,y)\,dy$

$=\left[1\cdot f_x(x,1)-0\cdot f_x(x,0)\right]-\int_0^1 f_x(x,y)\,dy$

☆ $f_{xy}\,dy=df_x$

$\therefore I=-\int_0^1 x\,dx\int_0^1 f_x(x,y)\,dy=-\int_0^1 dy\int_0^1 x f_x\,dx=\cdots=a$

再分部积分.

KOKUYO

例. 已知 $f(x,y)$ 连续. $F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\le t^2} f(x,y)\,d\sigma$, $t>0$. 求 $F'(t)$.

$$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr$$

交换积分次序

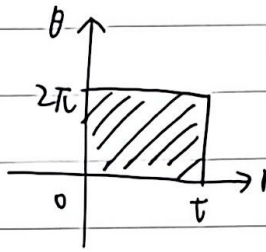
$$=\int_0^t dr\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,d\theta$$

↓

记为 $\varphi(r)$

$$=\int_0^t \varphi(r)\,dr$$

先在 $r\theta$ 坐标系看:



矩形区域, 可自由交换积分次序

$$\therefore F'(t)=\varphi(t)=\int_0^{2\pi} f(t\cos\theta,t\sin\theta)\,t\,d\theta.$$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

第一型曲线积分. $I=\int_L f(x,y,z)\,ds=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i$.

(对弧长的曲线积分).

若L封闭，可记为 $\oint f\,ds$.

光滑曲线L的参数方程: $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$.

$\alpha\le t\le\beta$.

若 $f(x,y,z)$ 在L上连续，则有:

$$\int_L f(x,y,z)\,ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$$

① L是平面曲线 $x=x(t)$, $y=y(t)$: $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$.

② L是平面曲线 $y=f(x)$. 则 $ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

补上 $x=x$. ↑ x为自变量，对其求导.

③ L是平面极坐标曲线 $r=r(\theta)$. ↖

则 $ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta$

$$\begin{cases}x=r(\theta)\cdot\cos\theta\\ y=r(\theta)\cdot\sin\theta\end{cases}$$

$$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

④ L是空间曲线 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$. 则 $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt$.

⑤ L是空间柱面坐标参数曲线. $r=r(\theta)$, $z=z(\theta)$. ↖

则 $ds=\sqrt{r^2+r'^2+z'^2}\,d\theta$

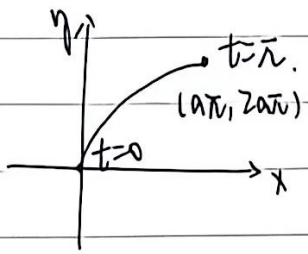
$x=r(\theta)\cos\theta$, $y=r(\theta)\sin\theta$, $z=z(\theta)$.

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 求摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $0\le t\le\pi$ 的质心.



$x'=a(1-\cos t)$.

$y'=a\sin t$.

$\therefore ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=a\sqrt{2-2\cos t}\,dt$

$=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2a\sin\frac{t}{2}\,dt$

$\because t\in[0,\pi]$.

$\therefore m=\int_L\mu\,ds=\mu\cdot\int_0^\pi 2a\sin\frac{t}{2}\,dt=4\mu a$.

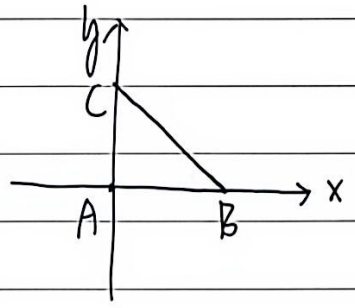
$\because \int_L\mu x\,ds=\mu\int_0^\pi a(t-\sin t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt=2\mu a^2\int_0^\pi(t-\sin t)\,d(-2\cos\frac{t}{2})$

$=\cdots\cdots=\frac{16}{3}\mu a^2$.

$\therefore \bar{x}=\frac{\int_L\mu x\,ds}{m}=\frac{4}{3}a$.

同理可得 $\bar{y}=\frac{4}{3}a$.

例. 求 $\oint_L x^2ds$. 其中 L 为连接 A(0,0), B(3,0), C(0,3) 的三角形边界曲线.



$\int_{AB}x^2ds=\int_0^3x^2dx=9$.

令 AB 段 $\begin{cases}x=t\\y=0\end{cases}$ $0\le t\le 3$.

$ds=\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt=dt$

$\therefore\int_{AB}x^2ds=\int_0^3t^2dt$

BC 段 $y=3-x$. $\Rightarrow ds=\sqrt{2}\,dx$

$\therefore\int_{BC}x^2ds=\int_0^3x^2\cdot\sqrt{2}dx=9\sqrt{2}$.

又 $\because$ AC 段 $x\equiv 0$. $\therefore\int_{AC}x^2ds=0$. $\therefore\oint_Lx^2ds=9+9\sqrt{2}$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 21.5.

Date

第一型曲线积分.

对称性:

① 若曲线 L 关于 y 轴对称，被积函数 $f(x,y)$ 关于 x 有奇偶性.

则 $\int_L f(x,y)\,ds = \begin{cases} 2\int_{L_1} f(x,y)\,ds, & f(-x,y)=f(x,y) \\ 0, & f(-x,y)=-f(x,y) \end{cases}$ L_1 为 L 在 x 轴正半轴的部分.

② 若曲线 L 关于 x 轴对称，$f(x,y)$ 关于 y 有奇偶性. 存在类似结论.

轮换对称性:

① 二元: 若平面曲线 L 关于 $y=x$ 对称，→ 将 x,y 对调后，L 的表达式不变.

则 $\int_L f(x,y)\,ds = \int_L f(y,x)\,ds$.

特别地，有 $\int_L f(x)\,ds = \int_L f(y)\,ds = \frac{1}{2}\int_L [f(x)+f(y)]\,ds$.

② 三元: 若空间曲线 Γ 关于 x,y,z 有轮换对称性.

则 $\int_\Gamma f(x,y,z)\,ds = \int_\Gamma f(y,z,x)\,ds = \int_\Gamma f(z,x,y)\,ds$.

特别地，有 $\int_\Gamma f(x)\,ds = \int_\Gamma f(y)\,ds = \int_\Gamma f(z)\,ds$

$= \frac{1}{3}\int_\Gamma [f(x)+f(y)+f(z)]\,ds$.

形心公式: (平面薄片均匀时，与质心重合).

$\bar{x} \overset{\text{质心}}{=\!=} \dfrac{\int_L x\cdot\mu(x,y)\,ds}{\int_L \mu(x,y)\,ds} \overset{\text{形心}}{=\!=} \dfrac{\int_L x\,ds}{\int_L ds}$ ($\mu(x,y)$ 为常数)

$\Rightarrow \int_L x\,ds = \bar{x}\int_L ds$.

同理，对 y 有: $\int_L y\,ds = \bar{y}\cdot\int_L ds$

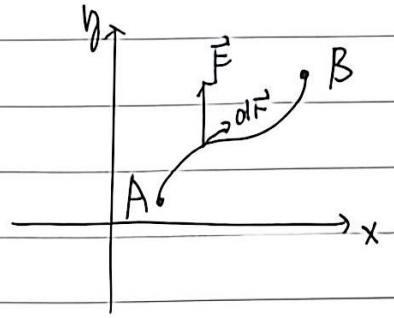
KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date

第二型曲线积分：

$P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$, $R=R(x,y,z)$



$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = (P,Q,R)\cdot(dx,dy,dz)$$
$$= P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

$\therefore A\to B$ 作功为 $W = \int_{AB}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{AB}(P\,dx+Q\,dy+R\,dz)$

$$= \int_{AB}P\,dx + \int_{AB}Q\,dy + \int_{AB}R\,dz$$

对称性：若平面曲线 L 关于 y 轴对称，且被积函数 P 关于 x 有奇偶性，则：

$$\int_L P(x,y)\,dx = \begin{cases} 2\int_{L_1}P(x,y)\,dx, & P(-x,y)=P(x,y) \\ 0, & P(-x,y)=-P(x,y). \end{cases}$$

（$\int_L P(x,y)\,dx$：水平方向的功）

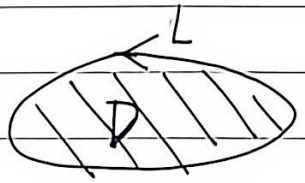
$$\int_L Q(x,y)\,dy = \begin{cases} 0, & Q(-x,y)=Q(x,y) \\ 2\int_{L_1}Q(x,y)\,dy, & Q(-x,y)=-Q(x,y). \end{cases}$$

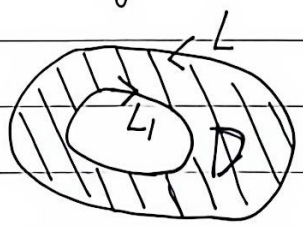
（$\int_L Q(x,y)\,dy$：垂直方向的功）

Green 公式：针对平面第二类曲线积分.

若 ① 分段光滑的曲线 L 围成平面有界闭区域 D.
② $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏导.
③ L 取正向

则有：$\oint_L P\,dx+Q\,dy = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma$.





$\therefore \oint_{L+L_1} P\,dx+Q\,dy = \iint_D(Q_x-P_y)\,d\sigma$.

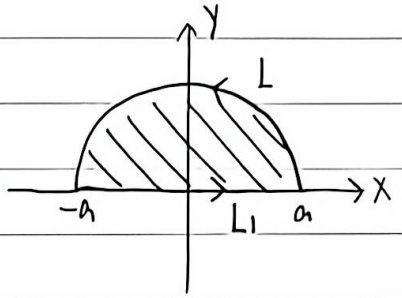
Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date

求 $\int_L x^2dx+(y-x)dy$. 其中 L 是上半圆周 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，沿逆时针方向.

[补线法] 曲线不封闭 → 补一条易计算的



补 L_1: $y=0$，x 从 -a 到 a.

$$\oint_{L+L_1} x^2dx+(y-x)dy=\iint_D(-1)dxdy$$

↑ $P=x^2$ ↑ $Q=y-x$

$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^a(-1)\cdot rdr$$

$$=-\frac{1}{2}\pi a^2.$$

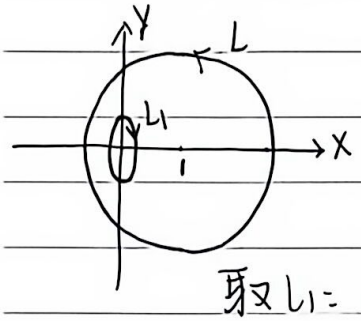
$$\int_{L_1} x^2dx+(y-x)dy=\int_{-a}^a x^2dx=\frac{2}{3}a^3.$$

↑ L_1 上，$y=0\Rightarrow dy=0$

$$\therefore \int_L=\oint_{L+L_1}-\int_{L_1}=-\frac{1}{2}\pi a^2-\frac{2}{3}a^3.$$

求 $I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点 (1,0) 为中心，R 为半径的圆周 ($R>1$)，取逆时针方向.

[挖洞法] 闭区域内有不可导点 → 挖掉.



$P=\frac{-y}{4x^2+y^2}$. $Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$ 在点 (0,0) 处无定义.

找一个闭曲线包住该点，同时应易于计算.

注意到 P、Q 前的分母相同，且类似椭圆.

取 L_1: $\varepsilon\to 0$，$4x^2+y^2=\varepsilon^2$. 顺时针方向

$$\oint_{L+L_1}=\iint_D(Q_x-P_y)d\sigma=\iint_D 0\,d\sigma=0.$$

求 x 时可用 Green 公式

$$\oint_{L_1}=-\oint_{L_1^-}\left(\frac{x}{\varepsilon^2}dy-\frac{y}{\varepsilon^2}dx\right)=-\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_1^-}(xdy-ydx)=-\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}2\,d\sigma=-\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 2\cdot\pi\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon$$

先调整至正向.

$$=-\pi$$

$$\therefore I=\oint_{L+L_1}-\oint_{L_1}=0-(-\pi)=\pi.$$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

设D为单连通区域，函数$P(x,y)$，$Q(x,y)$在D上有连续一阶偏导数，则以下命题等价：

$\hookrightarrow \iint_D (Q_x - P_y)\,d\sigma = 0$

① 在D内对任一分段光滑的封闭曲线C，有$\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$ $\because Q_x = P_y$

② 在D内任一曲线积分$\int_L P\,dx + Q\,dy$与路径无关

③ 在D内恒有$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$成立.

$P(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}$. $Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}$.

④ 存在二元函数$u(x,y)$，使$du(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

⑤ $P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$为某二元函数$u(x,y)$的对梯度.

全微分方程：$du(x,y) = 0 \rightarrow P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$的隐式通解为$u(x,y) = C$.

则$u(x,y)$的计算公式为：

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + C = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy + C.$$

（$\int_{L_1} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$，恒为0）

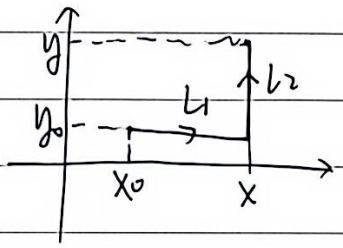
取最易计算的点.

沿任意从(x_0,y_0)到(x,y)的路径积分.

取两条平行于坐标轴的折线路径，dx为对x，y的定积分.

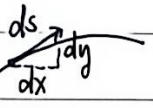
L_1：(x_0,y_0)到(x,y_0)

L_2：(x,y_0)到(x,y).



I型曲线 → I型曲线：

$$\int_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_L [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta]\,ds.$$



若L：$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \\ \cos\beta = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \end{cases}$

其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$为L沿正向切向量的方向余弦.

若L：$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} \\ \cos\beta = \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'^2(x)}} \end{cases}$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $\oint_L y^2 ds$. 其中 L 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线.

由 x, y, z 地位等价 → 轮换对称性.

有 $\oint_L x^2 ds = \oint_L y^2 ds = \oint_L z^2 ds$.

$\therefore \oint_L y^2 ds = \frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2) ds = \frac{1}{3}\left(\oint_L a^2 ds\right) = \frac{2\pi a^3}{3}$.

直接将曲线方程代入.

$= a^2 \oint_L ds$

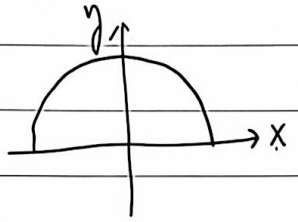
↑ 交线(圆)的周长

旋转体由一段曲线 $y=f(x)$, $x \in [a,b]$ 绕 x 轴旋转而来. 已知 $f(x) \geq 0$ 且 $f'(x)$ 连续. 则旋转体侧面积为:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

也可表示为 $S = \int_L 2\pi y\, ds$.

例. 球面的表面积



$x^2+y^2=a^2$ 取上半圆, 绕 x 轴转一圈 → 球面.

$S = \int_L 2\pi y\, ds$. 极坐标 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}$

有: $ds = a\, d\theta$

$\therefore S = \int_L 2\pi a\sin\theta \cdot a\, d\theta = \int_0^{\pi} 2\pi a\sin\theta \cdot a\, d\theta = 4\pi a^2$.

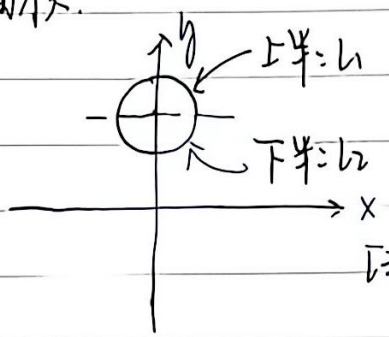
KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Na

Date

例. 求圆 $x^2+(y-b)^2=a^2$. $b>a>0$. 绕x轴旋转一周所得圆环体的表面积.



$S=\int_L 2\pi y\,ds=\int_{L_1}2\pi y\,ds+\int_{L_2}2\pi y\,ds$.

$x=a\cos t$. $y=b+a\sin t$. $\Rightarrow ds=a\,dt$

[法一]. $\therefore S=\int_0^{2\pi}2\pi(b+a\sin t)\cdot a\,dt=4\pi^2ab$

[法二]. $L_1: y=b+\sqrt{a^2-x^2}$ $L_2: y=b-\sqrt{a^2-x^2}$

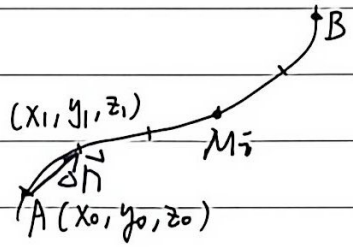
分别求 L_1、L_2 段的 ds.

再应用公式即可.

二元矢量函数 $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}=\{P,Q,R\}$

可视作一个随空间位置变化的力. $\Rightarrow$ 力场 $\{P,Q,R\}$

若质物体在曲线 L 上运动, 力场 $\{P,Q,R\}$ 对物体作的功:



$\Delta\vec{r}_1=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)=(\Delta x_1,\Delta y_1,\Delta z_1)$.

记 $\Delta\vec{r}_i=(\Delta x_i,\Delta y_i,\Delta z_i)$.

$W_i=\vec{F}(M_i)\cdot\Delta\vec{r}_i\Rightarrow W=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{F}(M_i)\cdot\Delta\vec{r}_i$

λ 依然是一种划分式, 将所有 $\Delta\vec{r}_i$ 划为极小的一段段.

从而有:

矢量函数 $\vec{F}$ 在 L 上的曲线积分 $\int_L\vec{F}\cdot d\vec{r}$ [第二型曲线积分]

其中 $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$. P,Q,R 为空间 D 上的有界函数, L 为 D 中的有向分段光滑曲线.

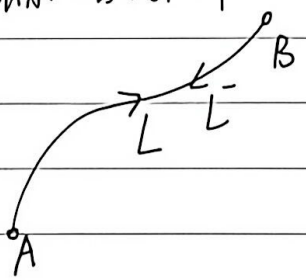
Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

性质：线性. $\int_L (a\vec{G}+b\vec{H})\,d\vec{r} = a\int_L \vec{G}\,d\vec{r} + b\int_L \vec{H}\,d\vec{r}$

$\int_{(L^-)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r}$

L^- 表示 L 反向，即从 B 指向 A.



分段可加. $\int_{L_1+L_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{L_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{L_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ (L_1, L_2 方向保持一致)

由 $\vec{F}=\{P,Q,R\}$. $d\vec{r}=\{dx,dy,dz\}$.

$\Rightarrow \int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_L P\,dx + \int_L Q\,dy + \int_L R\,dz = \int_L \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,ds$

$= \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds.$

$= \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

$\vec{\tau}$ 为曲线 L 的单位切向量. 方向与 L 相同.

L 的参数方程：$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. 记 $A=\vec{r}(a)$. $B=\vec{r}(b)$.

设曲线 L 定向从 A 指向 B. $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$ 连续. 则有：

$$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}'(t)\,dt = \int_a^b (Px'+Qy'+Rz')\,dt.$$

其中 P, Q, R 中的 x, y, z 均以 x(t), y(t), z(t) 代入.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

对平面曲线 $y=f(x)$. → 即 $\begin{cases} x=x \\ y=f(x) \end{cases}$

则有 $\int_L P\,dx+Q\,dy = \int_a^b (P+Qy')\,dx$

其中 y 以 $f(x)$ 代入.

$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \int_L P\,dx + \int_L Q\,dy + \int_L R\,dz$$

例. 求 $I=\int_L (x+y+z)\,dx$. 其中 L: $x=t^3$. $y=t^2$. $z=t$. 从 $(0,0,0)$ 指向 $(1,1,1)$.

$P=x+y+z$. $Q=0$. $R=0$. $P_x' = 3t^2(t^3+t^2+t)$.

$\vec{r}(t) = (t^3, t^2, t)$. $\vec{r}'(t) = (3t^2, 2t, 1)$.

$t: 0 \to 1$

$\therefore I = \int_0^1 3t^2(t^3+t^2+t)\,dt = \frac{23}{20}$.

例. 曲线 L: $y=x^2$. $(-1,1) \to (1,1)$. 求 $I = \int_L \underbrace{(x^2-2xy)}_{\text{记 } P}\,dx + \underbrace{(y^2-2xy)}_{\text{记 } Q}\,dy$.

$I = \int_{-1}^{1} [\underbrace{(x^2-2x^3)+(x^4-2x^3)\cdot 2x}_{P\cdot 1 + Q\cdot y'}]\,dx = -\frac{14}{15}$.

↑ $x \in [-1,1]$.

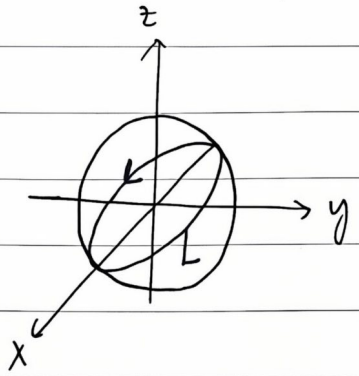
例. 求 $I=\int_L (x+y)\,dx + (y-x)\,dy$. 其中 L 为折线: $A(1,1) \to B(2,1) \to C(2,4)$.

$I = \int_{AB} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{BL} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{AB} (x+y)\,dx + \int_{BL} (y-x)\,dy$

$= \int_1^2 (x+1)\,dx + \int_1^4 (y-2)\,dy = 4.$

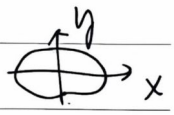
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $I=\int_L xyz\,dz$. L 为平面 $y=z$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 的交线. 从 z 轴正方向看为逆时针方向.



将曲线参数化:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ y=z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2y^2=9 \\ y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3\cos t \\ y=z=\frac{3\sin t}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



$(3,0,0)\to(3,0,0)$ 转一圈

方向由 $t=0\to t=2\pi$

$$I=\int_0^{2\pi} 3\cos t\cdot\frac{3\sin t}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3\sin t}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3\cos t}{\sqrt{2}}\,dt, \quad \text{无 } dz$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{81}{4\sqrt{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \cdots = \frac{81\sqrt{2}\pi}{16}$$

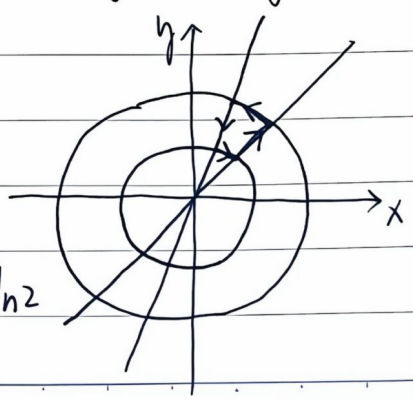
Green 定理: 设区域 D 由 xy 平面上的简单闭曲线 L 围成, 函数 P,Q 在 D 上(包括边界)有连续的一阶偏导数, 则有

$$\oint_L P\,dx+Q\,dy=\iint_D (Q_x-P_y)\,dx\,dy.$$

其中曲线积分取 L 的正向.

例. 求 $\oint_L \frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x}\,dx+\frac{2}{y}\arctan\frac{x}{y}\,dy$, 其中 L 为 $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y=x$, $y=\sqrt{3}x$, 在一象限所围区域的正向边界.

$$P=\frac{1}{x}\arctan\frac{y}{x} \quad Q=\frac{2}{y}\arctan\frac{x}{y} \Rightarrow Q_x=\frac{2}{x^2+y^2},\quad P_y=\frac{1}{x^2+y^2}$$



$$\therefore \text{原式}=\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta\int_1^2 \frac{1}{r^2}\,r\,dr=\frac{\pi}{12}\ln 2$$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$$\int_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_L \vec{F}\cdot\vec{\tau}\,ds = \int_L P\,dx + Q\,dy$$

$\vec{\tau}$ 切矢量.

$$\int_L \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \int_L \{-Q, P\}\cdot\vec{\tau}\,ds = \int_L P\,dy - Q\,dx$$

$\vec{n}$ 法矢. 转90°得切矢. → 反数乘以元.

$$\oint_L \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \oint_L P\,dy - Q\,dx = \iint_D (P_x + Q_y)\,dx\,dy$$

例. 设L为平面区域D的正向边界曲线. 其单位外法矢为 $\vec{n}$. 设函数 u, v 在D及L上有二阶连续偏导数. 证明:

$$\iint_D (\nabla u\cdot\nabla v)\,d\sigma = \oint_L u\frac{\partial v}{\partial n}\,ds - \iint_D u\Delta v\,d\sigma.$$

其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为拉普拉斯算子.

$$\oint_L u\frac{\partial v}{\partial n}\,ds = \oint_L u(\nabla v\cdot\vec{n})\,ds = \oint_L u\nabla v\cdot\vec{n}\,ds$$

$$= \oint_L \{-uv_y, uv_x\}\cdot\vec{\tau}\,ds = \iint_D \left(\frac{\partial(uv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(uv_y)}{\partial y}\right)d\sigma$$

$$= \iint_D (u_x v_x + uv_{xx} + u_y v_y + uv_{yy})\,d\sigma$$

$$= \iint_D (\nabla u\cdot\nabla v)\,d\sigma + \iint_D u\Delta v\,d\sigma. \qquad \square$$

Campus

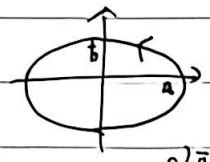
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date

由Green公式，当 $Q_x - P_y \equiv 1$ → 面积公式.

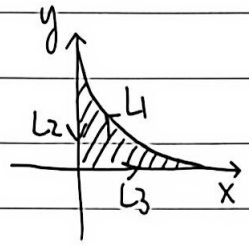
$$\iint_D dx\,dy = \oint_L x\,dy = \oint_L -y\,dx = \oint_L \frac{1}{2}x\,dy - \frac{1}{2}y\,dx = \frac{1}{2}\int_L x\,dy - y\,dx$$

例. 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$ 的面积.



$$\sigma = \oint_L x\,dy = \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cos t\,dt = ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \pi ab.$$

例. 已知曲线 $x = \cos^3 t$. $y = \sin^3 t$. $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. 和坐标轴围成区域 D.
求 $I = \iint_D x\,dx\,dy$



$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \oint_L P\,dx + Q\,dy.$$

$$Q_x - P_y \equiv f(x,y).$$

$$\Rightarrow Q_x - P_y \equiv x. \quad \Rightarrow Q = 0.\ P = -xy.$$

$$I = \oint_C -xy\,dx = \int_{L_1} -xy\,dx + \int_{L_2} -xy\,dx + \int_{L_3} -xy\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos^3 t \sin^3 t \cdot 3\cos^2 t(-\sin t)\,dt + 0 + 0$$

$$= \cdots = \frac{3}{105}$$

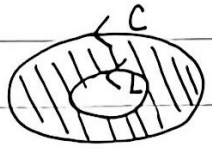
KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

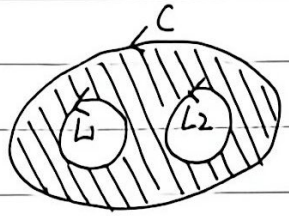
No.

Date

对于复连通区域，Green公式依然成立：

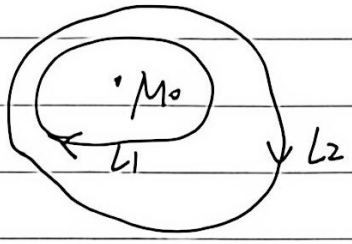


$$\oint_C + \oint_{L^-} = \iint_D (Q_x - P_y)\,d\sigma.$$



$$\oint_C + \oint_{L_1^-} + \oint_{L_2^-} = \iint_D (Q_x - P_y)\,d\sigma.$$

设除点 M_0 以外，P, Q 处处有连续的一阶偏导数，且 $P_y \equiv Q_x$. 则对任何包围点 M_0 的正向简单闭曲线 L，积分 $\oint_L P\,dx + Q\,dy$ 的值都相同.



设光滑曲线 L 表示为 $\vec{r}(t)$, $t \in I$. 起点从 $t=a$ 指向 $t=b$. 设 $f(x,y,z)$ 在 L 上有连续偏导数. 则成立

$$\int_L \nabla f \cdot d\vec{r} = f[\vec{r}(b)] - f[\vec{r}(a)] = f(B) - f(A).$$

$f[\vec{r}(b)] = f[x(b), y(b), z(b)]$

坐标形式为：$\int_L f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz = f(x_2,y_2,z_2) - f(x_1,y_1,z_1)$

二元情形下：$\int_L f_x\,dx + f_y\,dy = f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1)$.

对闭曲线：$\oint_L \nabla f \cdot d\vec{r} = 0$.

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 研究一个质量为 M 的均匀球体外部的引力场以及作功问题.

引力场 $\vec{F} = \frac{GMm}{r^2} \cdot \frac{\{-x_1, -y_1, -z_1\}}{r}$ 其中 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

↓

势函数 $u(x_1, y_1, z_1) = \frac{GMm}{r}$

↖ 求 u_x, u_y, u_z. 发现 $\vec{F} = \{u_x, u_y, u_z\}$.

$\therefore W = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1}$

设区域 D 是单连通区域, P, Q 在 D 上有连续偏导数, 则以下条件等价:

① 曲线积分 $\int_L P\,dx + Q\,dy$ 在 D 内与路径无关.

⇕

② 存在可微函数 $u(x, y)$, 使 $du = P\,dx + Q\,dy$.

⇕

③ 在 D 内成立 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 即 $Q_x = P_y$.

⇕

④ 对 D 内任何分段光滑闭曲线 C, 有 $\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求质点在力 $\vec{F}=\frac{-x\vec{i}-y\vec{j}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ 的作用下从点 $A(2,0)$ 沿椭圆弧 $x=2\cos t,\ y=\sin t$ 移动到 $B(0,1)$ 所做的功.

$$W=\int_L \frac{-x\,dx-y\,dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

[法一]

$$P=\frac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\quad Q=\frac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

除点 $(0,0)$ 外, 有 $Q_x=P_y$.

取 $u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 则 $W=u(x,y)\Big|_{(2,0)}^{(0,1)}=\frac{1}{2}$.

[法二]. 取路径 $(2,0)\to(1,0)\to(0,1)$

直线　圆弧 $x^2+y^2=1$.

$$I_1=\int_{(2,0)}^{(1,0)}\frac{-x\,dx}{x^3}=\frac{1}{2}$$

$$I_2=\int_{(1,0)}^{(0,1)}\frac{-x\,dx-y\,dy}{1}=0$$

$\therefore I=I_1+I_2=\frac{1}{2}$.

一种求"原函数"的方法：

对 $(2x-y)dx-(x+y)dy$.

$P=2x-y$. $Q=-x-y$.

$\because P_y=-1$. $Q_x=-1 \Rightarrow P_y=Q_x$

$\therefore$ "原函数"存在.

将原式拆开：$\underbrace{2x\,dx}\ \underbrace{-y\,dx-x\,dy}\ \underbrace{-y\,dy}$

$\Downarrow$

$d(x^2)-d(xy)-d(\frac{1}{2}y^2)$.

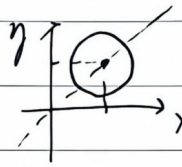
$\therefore$ "原函数"为 $x^2-xy-\frac{1}{2}y^2$.

已知 $f(x)>0$ 且连续. 已知 $L:(x-a)^2+(y-a)^2=1$ 取正向.

证明：$\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\geq 2\pi$.

$P=\frac{-y}{f(x)}$. $Q=xf(y)$.

$Q_x=f(y)$. $P_y=-\frac{1}{f(x)}$



$\iint_D f(y)\,dx\,dy=\iint_D f(x)\,dx\,dy$ 轮换对称性.

左边 $=\iint_D[f(y)+\frac{1}{f(x)}]dx\,dy=\iint_D[f(x)+\frac{1}{f(x)}]dx\,dy$

$\geq \iint_D 2\,dx\,dy=2\pi=$ 右边. □

均值不等式

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 求可微函数 $z=z(x,y)$ 使得 $z_x = y+2x$, $z_y = x-\cos y$.

方法一：不定积分法.

由 $z_x = y+2x$，积分得：$z = xy + x^2 + C(y)$ (*)

（积分：对 x 积分；$C(y)$：常数不含 x，但可含 y）

(*) 式对 y 求偏导：$z_y = x + C'(y)$

与已知的 $z_y = x-\cos y$ 比较，

得 $C'(y) = -\cos y$

$\Rightarrow C(y) = -\sin y + C$.

$\therefore z = xy + x^2 - \sin y + C$.

方法二：曲线积分法.

$$z(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (y+2x)\,dx + (x-\cos y)\,dy$$

$$= \int_{(0,0)}^{(x,0)} (y+2x)\,dx + \int_{(x,0)}^{(x,y)} (x-\cos y)\,dy$$

$$= x^2 + xy - \sin y.$$

$\therefore$ 通解为 $z(x,y) = x^2 + xy - \sin y + C$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

第一型曲面积分：

由质量 $m=\iint_S \mu(x,y,z)\,dS$

$$\downarrow$$

$$I=\iint_S f(x,y,z)\,dS.$$

化为二重积分：曲面 S 为 $z=z(x,y)$ 的图像，D 为 S 在 xOy 面的投影。

$$I=\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$$

若曲面 S 可表示为 $\vec{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}$

则有：$\iint_S f(x,y,z)\,dS=\iint_D f[\vec{r}(u,v)]\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|du\,dv.$

取 $f(x,y,z)=1$，得曲面面积公式 $S=\iint_S dS=\iint_D\left|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\right|du\,dv.$

eg. 柱面 $x^2+y^2=R^2$ 可表示为：$x=R\cos\theta$，$y=R\sin\theta$，$z=z$，$0\le\theta\le 2\pi$.

$\vec{r}=R\cos\theta\vec{i}+R\sin\theta\vec{j}+z\vec{k}$.

$\Rightarrow \vec{r}_\theta=-R\sin\theta\vec{i}+R\cos\theta\vec{j}$.

$\vec{r}_z=\vec{k}=(0,0,1)$.

$\therefore \vec{r}_\theta\times\vec{r}_z=R\cos\theta\vec{i}+R\sin\theta\vec{j}\Rightarrow\left|\vec{r}_\theta\times\vec{r}_z\right|=R$

$\therefore$ 柱面的面积元 $dS=\left|\vec{r}_\theta\times\vec{r}_z\right|d\theta\,dz=R\,d\theta\,dz$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的面积?

$$S=\iint_S dS=\iint_D R^2\sin\varphi\, d\theta d\varphi=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}R^2\sin\varphi\, d\varphi=4\pi R^2.$$

D: 球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ $\Rightarrow$ 球坐标 $\begin{cases}x=R\sin\varphi\cos\theta\\ y=R\sin\varphi\sin\theta\\ z=R\cos\varphi\end{cases}$

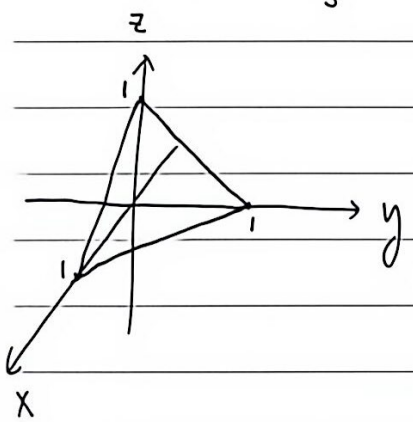
$0\le\theta\le 2\pi$. $\quad 0\le\varphi\le\pi$.

面积元: $dS=\underbrace{R\,d\varphi}_{\text{经线方向}}\cdot\underbrace{R\sin\varphi\, d\theta}_{\text{纬线方向}}=R^2\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi$.

例. S为 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分. 求 $\iint_S z\,dS$.

由轮换对称性, 有 $\iint_S x\,dS=\iint_S y\,dS=\iint_S z\,dS$.

$$\therefore yS=\frac{1}{3}\iint_S(x+y+z)dS=\frac{1}{3}\underbrace{\iint_S 1\cdot dS}_{\text{面积}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$



Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 28.5

Date

第一型曲面积分：

曲面 Σ：$z=z(x,y)$，在 xOy 面上投影为 D_{xy}

则：$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\cdot\sqrt{1+z_x'^2(x,y)+z_y'^2(x,y)}\,dx\,dy$

↑ 将 dS 投影至 xOy 平面后为 $d\sigma = dx\,dy$

同理，有：

若曲面 Σ：$y=y(x,z)$，在 xOz 投影 D_{xz}.

$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{D_{xz}} f[x,y(x,z),z]\cdot\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,dx\,dz$

若曲面 Σ：$x=x(y,z)$，在 yOz 投影 D_{yz}.

$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\cdot\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,dy\,dz$

dS 的法向量：$(z_x, z_y, -1)$.

$d\sigma$ 的法向量：$(0,0,1)$.

$\therefore \cos\gamma = \dfrac{(-z_x,-z_y,-1)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$

$\Rightarrow dS = \dfrac{d\sigma}{\cos\gamma} = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\cdot dx\,dy$

对称性：

若积分曲面 Σ 关于 xOy 面对称，被积函数 $f(x,y,z)$ 关于 z 有奇偶性，则：

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \begin{cases} 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,dS, & f(x,y,-z)=f(x,y,z). \\ 0, & f(x,y,-z)=-f(x,y,z). \end{cases}$$

其中 Σ_1 是 Σ 在 z 轴正半轴部分.

关于 yOz，xOy 对称同理.

若积分曲面 Σ 关于 x,y,z 有轮换对称性，则：

$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{\Sigma} f(y,z,x)\,dS = \iint\limits_{\Sigma} f(z,x,y)\,dS.$

特别地，$\iint\limits_{\Sigma} f(x)\,dS = \iint\limits_{\Sigma} f(y)\,dS = \iint\limits_{\Sigma} f(z)\,dS = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}[f(x)+f(y)+f(z)]\,dS$

↑ 便于直接代入空间表达式.

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

第二型曲面积分：$\iint_\Sigma \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$

假设液体流速 $\vec{v}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，在单位时间内流过曲面 Σ 指定侧的流体的质量。

$$\iint_\Sigma \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_\Sigma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS$$

$\cos\gamma\cdot dS=dx\,dy$ 为 dS 在 xOy 上的投影。

$\cos\beta\cdot dS=dz\,dx$，$\cos\alpha\cdot dS=dy\,dz$ 同理。

$$\Rightarrow \iint_\Sigma \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_\Sigma P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

若曲面 $\Sigma: z=z(x,y)$，D_{xy} 为曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域，则

$$\iint_\Sigma R(x,y,z)\,dx\,dy=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\,dx\,dy$$

以为二重积分计算。若 Σ 取上侧（法向量与 z 轴正向夹角为锐角），则取“+”，否则为“−”。

若 $\Sigma: x=x(y,z)$，D_{yz} 为 Σ 在 yOz 面上的投影，则

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\,dy\,dz=\pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\,dy\,dz$$

取决于 Σ 法向量与 x 轴正向的夹角。

$$\Rightarrow \iint_\Sigma \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS=\pm\iint_{D_{yz}} P\,dy\,dz\pm\iint_{D_{zx}} Q\,dz\,dx\pm\iint_{D_{xy}} R\,dx\,dy$$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

对称性：

若积分曲面 Σ 关于 xOy 面对称，且 $R(x,y,z)$ 关于 z 有奇偶性，则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,dxdy = \begin{cases} 0, & R(x,y,-z)=R(x,y,z) \\ 2\iint_{\Sigma_1} R(x,y,z)\,dxdy, & R(x,y,-z)=-R(x,y,z). \end{cases}$$

其中 Σ_1 是 Σ 在 z 轴正半轴的部分.

若 $\Sigma: z=z(x,y)$ 上侧，则 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{z_x'^2+z_y'^2+1}}(-z_x',-z_y',1)$

$\Rightarrow$ 由 $\cos\alpha=\frac{-z_x'}{\sqrt{z_x'^2+z_y'^2+1}}$，$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{z_x'^2+z_y'^2+1}}$ 且 $dxdy=\cos\gamma\cdot dS$

$$\Rightarrow dydz=\cos\alpha\cdot dS=\cos\alpha\cdot\frac{dxdy}{\cos\gamma}=-z_x'\cdot dxdy.$$

同理，有 $dzdx=-z_y'\cdot dxdy$

$$\therefore \iint_{\Sigma} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdz=\pm\iint_{D_{xy}}[P\cdot(-z_x')+Q\cdot(-z_y')+R]\,dxdy.$$

取决于 Σ 法向量与 z 轴正向的夹角

若 $\Sigma: x=x(y,z)$，则有 $\iint_{\Sigma} P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdz$

$$=\pm\iint_{D_{yz}}[P+Q\cdot(-x_y')+R(-x_z')]\,dydz.$$

KOKUYO

No.

Date

Gauss公式：闭曲面Σ围成有界区域Ω，Σ为Ω边界曲面的外侧，则：

$$\oiint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

三重积分、形心公式：

$\bar{x}$ 形如 $\dfrac{\iiint_{\Omega} x\,dV}{\iiint_{\Omega} dV}$ $\Rightarrow$ $\iiint_{\Omega} x\,dV = \bar{x}\cdot\iiint_{\Omega} dV$

$$\iiint_{\Omega} y\,dV = \bar{y}\cdot\iiint_{\Omega} dV$$

$$\iiint_{\Omega} z\,dV = \bar{z}\cdot\iiint_{\Omega} dV$$

散度 $\mathrm{div}\,\vec{F} = \dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z} = \nabla\cdot\vec{F}$.

$\therefore \oiint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}\,\vec{F}\cdot dV$.

$\vec{F} = (P, Q, R)$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$$\vec{n}=\frac{\nabla F}{|\nabla F|}=\frac{(F_x,F_y,F_z)}{\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}$$

设 S 为分片光滑的双侧曲面，单位法矢量为 $\vec{n}$. P,Q,R 为定义于 S 上的有界函数，$\vec{F}=\{P,Q,R\}$. 则称 $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ 为矢量函数 $\vec{F}$ 在曲面 S 的指定侧上的第二型曲面积分.

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS$$

$$=\iint_S P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy.$$

这里记 $dy\,dz=\cos\alpha\,dS$. $dz\,dx=\cos\beta\,dS$. $dx\,dy=\cos\gamma\,dS$.

若 $-S$ 为 S 的反向曲面，则有 $\iint_{-S}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=-\iint_S\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$

计算方法：

I. 用定义式. 分别求出 $\vec{F}$ 和 $\vec{n}$. 然后按第一型曲面积分公式计算：

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS.$$

II. 统一投影法. 若曲面 $S: z=z(x,y)$，则有：

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iint_D(-P z_x-Q z_y+R)\,dx\,dy.$$

此为 S 取上侧时的表达式. 若 S 取下侧，应加负号.

III. 分块投影法.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

矢量函数 $\vec{F}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$

定义：① 散度 $\operatorname{div}\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=P_x+Q_y+R_z$.

② 旋度 $\operatorname{rot}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\{R_y-Q_z,\ P_z-R_x,\ Q_x-P_y\}$

其中 ∇ 为 Hamilton 算子：$\nabla=\{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\}$.

性质：1. 均满足线性规则.

$$\nabla(au+bv)=a\nabla u+b\nabla v.$$

$$\nabla\cdot(a\vec{F}+b\vec{G})=a\nabla\cdot\vec{F}+b\nabla\cdot\vec{G}$$

$$\nabla\times(a\vec{F}+b\vec{G})=a\nabla\times\vec{F}+b\nabla\times\vec{G}$$

2.
$$\begin{cases}\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v\\ \nabla\cdot(u\vec{F})=\nabla u\cdot\vec{F}+u\nabla\cdot\vec{F}\\ \nabla\times(u\vec{F})=\nabla u\times\vec{F}+u\nabla\times\vec{F}\\ \nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G})=(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{G}-\vec{F}\cdot(\nabla\times\vec{G})\end{cases}$$

$$\nabla f(u)=f'(u)\nabla u.$$

$$\begin{cases}\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})=\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F})=0\\ \nabla\times\nabla u=\operatorname{rot}(\operatorname{grad}u)=\vec{0}\\ \nabla\cdot\nabla u=\nabla^2u=\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\end{cases}$$

↑ Laplace 算子.

Gauss 公式：$\oiint_S\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS=\iiint_V(\nabla\cdot\vec{F})\,dV$

$$\oiint_S P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy=\iiint_V(P_x+Q_y+R_z)\,dV.$$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Stokes 公式：曲面 S，边界→闭曲线 L，L 方向与 S 一致（右手螺旋判定），矢量函数 $\vec{F}$。

$$\oint_L \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F})\cdot \vec{n}\, dS$$

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \\ dy\,dz & dx\,dz & dx\,dy \end{vmatrix} = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} dS$$

其中 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

级数：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$.

部分和：$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

若 $\exists S$，$S = \lim_{n\to\infty} S_n$，则称 S 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和，即 $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

当 S 有限时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，否则为发散。

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 级数求和:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}\to 1$$

$\because n\to\infty$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\to\frac{3}{4}.$$

分解: $\frac{1}{n(n+\alpha)(n+\beta)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+\alpha}+\frac{C}{n+\beta}$. 解出 A、B、C 即可

级数性质: 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A$. $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=B$. 则有:

① $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n+\mu b_n)=\lambda A+\mu B$.

② 若 $a_n\le b_n$. 则 $A\le B$.

③ 在收敛级数中加括号, 新级数仍收敛且和不变

注意: 反过来则不成立

↓

如: $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0$ 收敛.

但去掉括号后 $1-1+1-1+1-1+\cdots$ 则发散.

④ 增减级数 $\sum a_n$ 的有限项, 不影响其收敛性 (但可能改变级数的和).

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散

令

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$. 不满足 $a_n \to 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{6}$ 发散

$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{6} =$ 取 $n = 12m+3$, $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{6} = 1$

$a_{12m+3} \to 1$. 则 $a_n \not\to 0$.

例. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

$S_2 = 1+\frac{1}{2} > \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{2}{2}$

$S_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

$S_8 = \cdots > \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{4}{2}$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

$\therefore S_{2^n} > \frac{n+1}{2}$, $n = 1, 2, \cdots$

$\therefore \{S_{2^n}\}$ 无界 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

(子列无界 $\Rightarrow$ 主数列无界)

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$.

正项级数收敛对的充要条件：$\{S_n\}$ 有界

↳ $a_n \geq 0$. 则 S_n 单增.

由单调有界收敛准则，$\{S_n\}$ 收敛 → 级数收敛

比较判别法：若 $0 \leq a_n \leq b_n$, $n=1,2,\cdots$. 则若 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

比值判别法：对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，记 $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in [0, +\infty)$.

当 $0 \leq l < 1$ 时，级数收敛.

当 $l > 1$ 时，级数发散.

$l = 1$ 时不能判别.

例. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$, $x > 0$ 的敛散性.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{x^n} = \frac{(n+1)x \cdot n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= x \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$\therefore l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{e}$.

当 $0 < x < e$, $l < 1$. 收敛

当 $x > e$, $l > 1$. 发散

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$

若 $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

P级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ { 若 $p>1$. 收敛; 若 $p\leq 1$. 发散.

等比级数: $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \ (a\neq 0)$ { 当 $|q|<1$. 收敛; 当 $|q|\geq 1$. 发散.

↳ $S = \frac{a_1}{1-q}$ ← $\frac{首项}{1-公比}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ { 当 $\alpha>1$. 收敛; 当 $\alpha<1$, 发散; 当 $\alpha=1$ { $\beta>1$. 收敛; $\beta\leq 1$. 发散.

比较判别法. 记 $A = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$. 前提: u_n, v_n 均正项.

① 若 $0<A<+\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 敛散性相同

② 若 $A=0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

③ 若 $A=+\infty$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

KOKUYO
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

对正项级数：

比值判别. 令 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

$\begin{cases}\rho<1. & \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 收敛}\\ \rho>1. & \text{发散. 且 } \lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty\\ \rho=1 & \text{无法判断.}\end{cases}$

根值判别. 令 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$.

$\begin{cases}\rho<1. & \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 收敛}\\ \rho>1. & \text{发散. 且 } \lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty\\ \rho=1 & \text{无法判断.}\end{cases}$

$n\to\infty$, $\sqrt[n]{n!}\to\infty$.

求幂级数收敛域：$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

① $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 或 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$

② $R=\frac{1}{\rho}$. $\Rightarrow (-R,R)$ 为收敛区间.

③ 再检验 $x=\pm R$ 端点处是否收敛.

若存在缺项 $\to \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^{2n}$

↳ 则先按不缺项情形求 ρ. $R=\sqrt{\frac{1}{\rho}}$.

若为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^{3n+1}$. 则同理，$R=\sqrt[3]{\frac{1}{\rho}}$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求和函数：P。除了ln(1+x)之外，全部从n=0开始。

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. $x \in (-1,1)$ 收敛域

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n = \frac{1}{1+x}$. $x \in (-1,1)$.

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x^{n+1})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x^{n+2})'' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}\right)'' = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$. $x \in (-1,1]$

$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$. $x \in [-1,1)$.

$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ $x \in [-1,1]$.

$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $x \in (-1,1)$.

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. $x \in (-\infty, +\infty)$.

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $x \in (-\infty, +\infty)$.

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $x \in (-\infty, +\infty)$.

若求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 的和，可先求 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的 $S(x)$，再令 $x = x_0$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

傅里叶级数：当 $T=2l$ 时：

$$f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中 $a_0=\frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l}f(x)\,dx.$

$a_n=\frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx.$ ← 均为在任意一个周期内积分.

$b_n=\frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$

表格法求积分：e.g. $\int_0^{\pi}x^2\cos 2x\,dx.$

x^2	⊕	$2x$	⊖	2	⊕	0
$\cos 2x$		$\frac{1}{2}\sin 2x$		$-\frac{1}{4}\cos 2x$		$-\frac{1}{8}\sin 2x.$

$$\Rightarrow I=\left[\frac{1}{2}x^2\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}.$$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

当 $x=e$，无法使用 x 值判别.

不取极限时，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1$

证明：单调增的数列，始终 $<e$.

则 $a_{n+1}>a_n$.

$\therefore a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

根值判别法：对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，令 $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$，$l\in[0,+\infty)$.

当 $0\le l<1$ 时，收敛

当 $l>1$ 时，发散

当 $l=1$ 时不能判别.

例. 判断级数敛散性：(1). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$；(2). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{3^n}$；(3). $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

(1). $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{2}=\frac{1}{2}<1$

$\therefore$ 收敛.

(2). $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3+(-1)^n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3+(-1)^n}}{3}=\frac{1}{3}<1$.

$\uparrow\ \sqrt[n]{2}\le\sqrt[n]{3+(-1)^n}\le\sqrt[n]{4}$

$\therefore$ 收敛.

(3). $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3-\frac{1}{n}}\right)^{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{9}$

$\therefore$ 收敛.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 的敛散性.

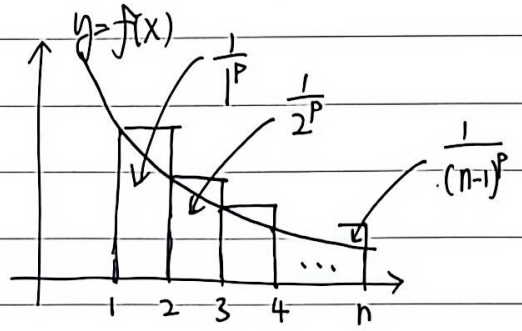
求根值判别:

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\ln n}{n}\cdot \ln n}}{\ln n}$$

$$= \frac{1}{\infty} = 0 \quad \leftarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = 0 \ (\text{洛})$$

$\therefore$ 收敛.

例. 讨论 P 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p>0$ 的敛散性.



$f(x) = \frac{1}{x^p}$

看面积:

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^p} \geq \int_1^n f(x)\,dx$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2^p} \leq \int_1^2 f(x)\,dx \\ \frac{1}{3^p} \leq \int_2^3 f(x)\,dx \\ \vdots \quad \vdots \\ \frac{1}{n^p} \leq \int_{n-1}^n f(x)\,dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} \leq 1 + \int_1^n f(x)\,dx$$

$\therefore$ 当 $p>1$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ 收敛. $\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx$ 有界. $\sum \frac{1}{n^p}$ 收敛

当 $0<p\leq 1$ 时, $\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx$ 无界 $\rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ 发散. $\sum \frac{1}{n^p}$ 发散

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$

积分判别法：若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上非负连续且单调减，
则 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 同时收敛或同时发散.

例. 考察级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 与 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ 的收敛性.

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n} \longleftrightarrow \underbrace{\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\,dx}_{(*)}$ 表达式含对数/幂 → 考虑积分判别法.

$(*) = \int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\,d(\ln x) = \ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty} = +\infty$. 发散.

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n} \longleftrightarrow \underbrace{\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\,dx}_{(**)}$

$(**) = \int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln^2 x}\,d(\ln x) = \int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_{\ln 2}^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2}$. 收敛.

比较判别法. 极限形式：若 $a_n>0$, $b_n>0$.

记 $l = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, $0\le l\le +\infty$.

当 $0<l<+\infty$ 时，$\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 同时收敛或同时发散.
当 $l=0$ 且 $\sum b_n$ 收敛，有 $\sum a_n$ 收敛
当 $l=+\infty$ 且 $\sum b_n$ 发散，有 $\sum a_n$ 发散

取 $b_n = \frac{1}{n^p}$ → 比较判别法 (textbook Page 191).

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$ 发散.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{n}{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{n+2}} = 1$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 同时发散.

($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散)

例. 已知 $x_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$. 证明 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在.

$\lim_{n\to\infty} x_n = L \Leftrightarrow x_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$ 收敛.

$\therefore$ 只需证 $\sum_{n=2}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$ 收敛

$\Leftrightarrow$ 证 $\sum_{n=2}^{\infty}(x_{n-1} - x_n)$ 收敛.

$$x_{n-1} - x_n = -\ln(n-1) + \ln n - \frac{1}{n} = \ln\frac{n}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$= -\ln\frac{n-1}{n} - \frac{1}{n} = -\left[-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - \frac{1}{n}$$

(Taylor展开)

$$= \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$$ 收敛.

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 判断级数敛散性: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{2}-\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right)$

[法一]. $\sqrt[n]{2}-1=e^{\frac{1}{n}\ln 2}-1\sim\frac{1}{n}\ln 2$.

$\sqrt{\frac{n+1}{n}}-1=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2n}$

$\therefore a_n\sim\frac{1}{n}\ln 2-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$ 由 $\frac{1}{n}$ 发散. 知原级数发散.

[法二]. 用无穷小量 $o(\cdots)$ Taylor展开

$\sqrt[n]{2}-\sqrt{\frac{n+1}{n}}=e^{\frac{1}{n}\ln 2}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{n}\ln 2+o\left(\frac{1}{n}\right)-\left[1+\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$

$=\frac{1}{n}\ln 2-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)$

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{n^2+n+1}$

$a_n=\arctan\frac{1}{n^2+n+1}\sim\frac{1}{n^2+n+1}\sim\frac{1}{n^2}$ 收敛

是p级数. $p>2$.

求和: 由 $\arctan\frac{1}{n^2+n+1}=\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}$ ★项的拆分!

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{n^2+n+1}$

$\therefore S_n=\arctan 1-\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{2}-\arctan\frac{1}{3}+\cdots$

$+\arctan\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n+1}$

$=\arctan 1-\arctan\frac{1}{n+1}\to\frac{\pi}{4}$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 判断级数敛散性: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx$.

令 $t=\tan x$. 则 $x=\arctan t$. $\Rightarrow dx=\frac{1}{1+t^2}$.

$x: 0\to\frac{\pi}{4}$

$t: 0\to 1$

$\therefore a_n=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx=\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt \le \frac{1}{n}\int_0^1 t^n\,dt=\frac{1}{n(n+1)}$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

交错级数: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot u_n$. $u_n>0$.

若有 $\begin{cases} ① \ \forall n,\ u_n \ge u_{n+1} \ (\text{单调减}). \\ ② \ \lim\limits_{n\to\infty} u_n=0 \end{cases}$

则级数收敛. 其和 $S\le u_1$, 且有 $|S-S_n|\le u_{n+1}$.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛

① $\frac{1}{n}$ 单减 ② $\frac{1}{n}\to 0$.

$\therefore$ 收敛.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

任意项级数 $\sum u_n$.

若 $\sum |u_n|$ 收敛，则 $\sum u_n$ 收敛.

证：构造 $v_n = \frac{|u_n| + u_n}{2}$. 显然 $0 \le v_n \le |u_n|$

由比较判别法，$\sum |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum v_n$ 收敛.

$\because u_n = 2v_n - |u_n|$

$\therefore$ 由两个收敛级数之差仍收敛，

$$\begin{cases} \sum 2v_n \text{ 收敛} \\ \sum |u_n| \text{ 收敛} \end{cases} \Rightarrow \sum u_n \text{ 收敛}$$

定义：$\sum |u_n|$ 收敛. 称 $\sum u_n$ 绝对收敛.

$\sum |u_n|$ 发散，且 $\begin{cases} \sum u_n \text{ 收敛. 称 } \sum u_n \text{ 条件收敛} \\ \sum u_n \text{ 发散. } \to \text{发散} \end{cases}$

令 $v_n = \frac{|u_n| + u_n}{2}$. $w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2}$

$\Rightarrow |u_n| = v_n + w_n$. $u_n = v_n - w_n$.

当且仅当 $\sum v_n$, $\sum w_n$ 均收敛时，$\sum |u_n|$ 收敛.

充要.

$\sum u_n$ 条件收敛 $\Leftrightarrow \sum v_n$, $\sum w_n$ 均发散，且 $\sum (v_n - w_n)$ 收敛

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\ln n}$ 条件收敛

$\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n\ln n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ 发散. ← 积分判别.

$\because u_n = \frac{1}{n\ln n}$ 单调减.

且 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\ln n}$ 收敛. $\therefore$ 条件收敛. □.

例. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 的敛散性.

$0<p\le 1$ 时. $\sum \frac{1}{n^p}$ 发散. 但由 Leibniz 判别, $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 收敛

$\therefore \Rightarrow$ 条件收敛.

$p>1$ 时. 绝对收敛. ($\sum \frac{1}{n^p}$ 收敛且 $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 收敛)

$p\le 0$ 时. $\frac{1}{n^p}$ 不为0. $\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 不为0. 发散

例. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\cdot(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 的敛散性.

$|a_n| = |\sqrt{n+1}-\sqrt{n}| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$

$\because \sum \frac{1}{2\sqrt{n}}$ 发散 $\therefore \sum |a_n|$ 发散.

$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \Rightarrow u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$ 且单减

$\therefore \sum a_n$ 收敛

$\therefore$ 条件收敛

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\sin nx$. $x>0$.

$|a_n| = |e^{-nx}\sin nx| \le e^{-nx}$

由根值判别, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-nx}} = \lim_{n\to\infty} e^{-x} = \frac{1}{e^x} < 1 \quad (x>0)$

$\Rightarrow \sum e^{-nx}$ 收敛

$\therefore \sum e^{-nx}\sin nx$ 绝对收敛.

例 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

$a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = (-1)^n\sin(\pi\sqrt{n^2+1} - n\pi) = (-1)^n\cdot\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$|a_n| = \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim \frac{\pi}{2n}$.

$\because \sum\frac{\pi}{2n}$ 发散 $\therefore \sum|a_n|$ 发散

由 Leibniz, $\sum a_n$ 收敛

$\therefore$ 为条件收敛.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n^2}}{n!}\cdot(-1)^{n-1}$.

$|a_n| = \frac{2^{n^2}}{n!} \quad |a_{n+1}| = \frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}$

$\because \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{n+1} = +\infty$.

$\therefore |a_n|$ 无界, $a_n \not\to 0$ 知 $\sum a_n$ 发散.

KOKUYO

No.

Date

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 均绝对收敛，且有 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$.

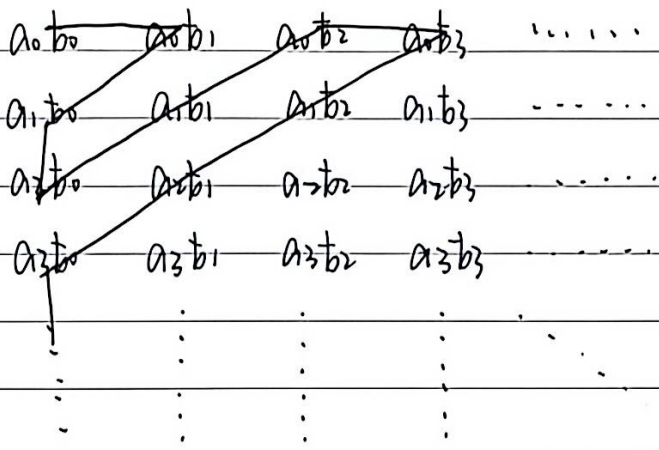
则 $a_m b_n$ ($m=0,1,2,\cdots$; $n=0,1,2,\cdots$) 按任意顺序相加所得级数 $\sum a_m b_n$ 绝对收敛，且其和为 AB.

特别地，有：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k+l=n} a_k b_l = a_0b_0 + (a_0b_1+a_1b_0) + (a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0) + \cdots$$

$$= AB.$$

$(a_0+a_1+a_2+\cdots)\cdot(b_0+b_1+\cdots)$:



绝对收敛 ± 绝对收敛 → 绝对收敛

$\sum u_n$ $\sum v_n$ $\sum(u_n \pm v_n)$

证：$0 \le |u_n \pm v_n| \le |u_n| + |v_n|$

$\sum(|u_n|+|v_n|)$ 收敛.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

函数项级数：无穷多个函数相加

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

取定 $x = x_0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots$

↓

若收敛，称点 $x = x_0$ 为收敛点，

该级数的全部收敛点 → 收敛域。

和函数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$

例：几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}$，$x \in (-1, 1)$。

收敛：$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$。

取定 x，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，$\forall n > N$：$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$。

一致收敛：$S_n(x) \rightrightarrows S(x)$。

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，$\forall n > N$，$\forall x \in I$，$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$。

Weierstrass 判别法：若 $\exists$ 收敛的正项级数 $\sum b_n$，使得 $|u_n(x)| \le b_n$（$x \in I$，$n = 1, 2, \cdots$）。则 $\sum b_n$ 在 I 上绝对收敛且一致收敛。

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

设 $S_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$. 若 $S_n(x)$ 在 I 上连续，则 $S(x)$ 连续.

对 $\forall a,b \in I$，有：$\int_a^b S(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx$.

$$\downarrow$$

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{k=1}^{n} u_k(x)\,dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b u_k(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

即：$\sum$ 与 $\int_a^b$ 可交换顺序

设 $S_n(x) \in C^1$ 在区间 I 上收敛于函数 $S(x)$，且 $S_n'(x)$ 一致收敛. 则 $S_n(x)$ 在 I 上收敛于可微函数 $S(x)$，且成立：$S'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n'(x)$.

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x).$$

即：$\sum$ 与 $\frac{d}{dx}$ 可交换顺序.

例. 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} \sin^a x\,dx$ $(a>1)$ 的敛散性.

当 $x>0$ 时，$\sin x \le x$.

$\therefore a_n \le n \int_0^{\frac{1}{n}} x^a\,dx = n \cdot \frac{1}{1+a} \cdot \left[x^{1+a}\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+a} \cdot \frac{1}{n^a}$ $(a>1)$.

$\therefore$ 级数收敛

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛. 证: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 收敛.

由均值不等式: $\frac{|a_n|}{n} \le \frac{1}{2}(a_n^2 + \frac{1}{n^2})$

本题用比较判别法, 得证.

例. 判断: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{a_n} - 1)$ 收敛 ?

↓

则有 $a_n \to 0$. $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$.

$e^{a_n} - 1 = a_n + \frac{1}{2!}a_n^2 + o(a_n^2)$.

取 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. $\sum a_n$ 收敛.

但 $e^{a_n} - 1 = e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$

↓

$\sim \frac{1}{2n}$ 发散

$\therefore \sum (e^{a_n} - 1)$ 发散.

同次, 若 $a_n \sim b_n$ 且 $\sum a_n$ 收敛. 则 $\sum b_n$ 不一定收敛.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

关于 $x-a$ 的幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$

例. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 的收敛域

$S(x) = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$|u_n| = \frac{|x|^n}{n!}$，$|u_{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$

由比值判别法，$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$.

∴ 绝对收敛

∴ 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

例. 求幂级数 $1 + x + 4x^2 + \cdots + n^n x^n + \cdots$ 的收敛域.

当 $x \neq 0$ 时：$|n^n x^n| = (n|x|)^n > 2^n$

↳ 无界

⇒ 发散

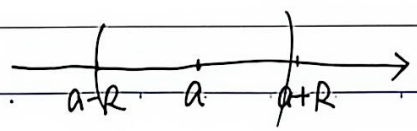
当 $x = 0$ 时：收敛

∴ 收敛域为 $\{0\}$.

Abel 定理：若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot c^n$ $(c \neq 0)$ 收敛. 当 $|x| < |c|$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 绝对收敛.

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot c^n$ 发散. 当 $|x| > |c|$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ 发散.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ 收敛区间为 $(a-R, a+R)$.



Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$. 则有：

当 $0<\rho<+\infty$，$R=\frac{1}{\rho}$

当 $\rho=0$，$R=+\infty$.

当 $\rho=+\infty$，$R=0$

利用根值判别法，有：

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

确定幂级数的收敛域：Step 1. 求收敛半径和收敛区间

Step 2. 代入收敛区间的两端点，判断敛散性.

例. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{3^n+n^2}$ 的收敛域.

$$\text{原式} = x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n+n^2}$$

显然，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n+n^2}$ 与原级数收敛域相同.

令 $y=x^2$.

得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{3^n+n^2}\to a_n=\frac{1}{3^n+n^2}$

$$\because R_1=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+n^2}=3$$

$$\sqrt[n]{3^n}\le\sqrt[n]{3^n+n^2}\le\sqrt[n]{3^n+3^n}$$

$$\downarrow\qquad\qquad\downarrow$$

$$3\qquad\qquad 3$$

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n+n^2}=1$$

且当 $y=\pm 3$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{3^n+n^2}$ 均发散 (Leibniz).

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{3^n+n^2}$ 的收敛域为 $(-3,3)$

$\therefore$ 原级数的收敛域为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 幂级数在 $x=-1$, $x=5$ 条件收敛. 求收敛域和收敛半径.

由 Abel 定理, $(a-R, a+R)$ 内绝对收敛

又 $\to$ 发散

$\therefore$ $x=-1$, $x=5$ 只可能是收敛区间的端点.

$\therefore$ 收敛域: $[-1, 5]$.

收敛半径 $R=3$.

$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. $-R<x<R$. $R>0$.

当 $x\in(-R, R)$ 时, 有: $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$\vdots$

$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$

} 所得的幂级数仍以 R 为收敛半径.

若 $[a, b]\subset(-R, R)$, 则 $\int_a^b S(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n x^n\,dx$

即: 求导/积分可与求和交换次序.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

给定函数 $f(x)$，若在某个区间 $(a-r, a+r)$ 内成立：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

则称 $f(x)$ 可展开为幂级数，或称函数 $f(x)$ 在点 a 处实解析。

若，以上等式成立，则 $f(x)$ 无穷次可微，且有 $a_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

定义：设函数 $f(x)$ 在 $(a-r, a+r)$ 内无穷次可微，级数

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ 称为 $f(x)$ 在点 a 的 Taylor 级数。

当 $a=0$，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 称为 $f(x)$ 的 Maclaurin 级数。

当 $f(x)\in C^{\infty}$，等式 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ 不一定成立！

反例：$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}\overset{洛}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2te^{t^2}}=0.$$

……

$f^{(n)}(0)=0.$

$\Rightarrow$ Maclaurin 级数恒为 0，与 $f(x)$ 不相等。

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

Taylor 级数的部分和：

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

记 $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

$R_n(x)$：余项.

定理：级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ 收敛于 $f(x)$ 的充要条件是 $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

例. 证明 $\cos x$ 在 $x=0$ 可展开为幂级数.

∵ 对 $\sin x$，有：

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$$

∴ 两边求导，得：

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \qquad \square.$$

例. 求 $x\cos^2 x$ 的 Maclaurin 级数

∵ $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$.

且 $\cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot (2x)^{2n}$

$$\therefore \cos^2 x = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot 2^{2n-1} \cdot x^{2n}.$$

$$\therefore x\cos^2 x = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot 2^{2n-1} \cdot x^{2n+1}$$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

由几何级数 $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots$ $|x|<1$.

将 x 用 $-x^2$ 替换:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \quad |x|<1.$$

逐项积分, 得:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad -1<x<1. \quad (*)$$

$\because$ $\begin{cases} \arctan x \text{ 在 } x=1 \text{ 连续} \\ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots \text{ 收敛} \end{cases}$

$\therefore$ 当 $x=1$, $(*)$ 仍成立.

对于 $x=-1$, 同理.

例. $\frac{1}{2+x-x^2}$ $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

令 $\frac{1}{S} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow A=\frac{1}{3}$. $B=-\frac{1}{3}$.

$$\therefore \frac{1}{S} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x}\right) = \frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n + \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \quad -1<x<1.$$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

在两绝对收敛级数的共同收敛区间内有：

$$\sum_0^\infty a_n x^n \cdot \sum_0^\infty b_n x^n = \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{k+l=n} a_k b_l \right) x^n.$$

例. $\frac{e^x}{1-x}$.

[法一]. 不使用乘积公式.

$$y_S = e^x \cdot \frac{1}{1-x} = \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\cdot\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right) \quad -1<x<1$$

$$= 1+\left(1+\frac{1}{1!}\right)x+\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)x^2+\cdots\cdots$$

↓硬算…

$$= 1+\sum_{n=1}^\infty \left(1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)x^n. \quad -1<x<1.$$

[法二]. 用公式：

$$y_S = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}\cdot\sum_{l=0}^\infty x^l = \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{k+l=n} a_k b_l\right)x^n = \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{k+l=n}\frac{1}{k!}\right)x^n.$$

例. 求 $S(x)=\sum_{n=1}^\infty n x^n$.

$$\sum_{n=1}^\infty n x^n = x\cdot\sum_{n=1}^\infty n x^{n-1} = x\left(1\cdot x^0+2\cdot x^1+3\cdot x^2+\cdots\right)$$

↓

是 $x^1+x^2+x^3+\cdots$ 的导数

$$\therefore y_S = x\cdot\sum_{n=1}^\infty \frac{d}{dx}x^n = x\cdot\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^\infty x^n = x\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

交换次序

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n x^{2n+1}$

令 $y=-x^2$

$$yS=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n x^{2n}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot(-x^2)^n=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot y^n=x\cdot\frac{y}{(1-y)^2}$$

把所有 n 次方聚到一起

$$=\frac{-x^3}{(1+x^2)^2}$$

$-1<-x^2<1$

$\Downarrow$

$-1<x<1$

例. 求 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$

$$yS=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}-\frac{x}{(1-x)^2}$$

"阶梯状"打开到一起，求导数.

注意到，$(n+1)nx^{n-1}=[x^{n+1}]^{(2)}$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}[x^{n+1}]^{(2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2}{dx^2}x^{n+1}$$

$$=\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{d^2}{dx}\cdot\left(\frac{x^2}{1-x}\right)=\frac{2x}{(1-x)^3}\quad -1<x<1.$$

等比级数.

$$\therefore S(x)=\frac{2x}{(1-x)^3}-\frac{x}{(1-x)^2}\quad -1<x<1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=x^2+x^3+x^4+\cdots=x^2(1+x+x^2+\cdots)=x^2\cdot\frac{1}{1-x}.$$

$-1<x<1.$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (n^2-n+1)}{2^n}$

先求 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n+1)x^n$ 再代入 $x=-\frac{1}{2}$ 得 $S(-\frac{1}{2})$.

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-n)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^n+\sum_{n=2}^{\infty}x^n$

$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$.

对 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^n$ 当 $n=1$ 时, $n(n-1)x^n=0$. $[x^n]''$

$\Rightarrow \text{原式}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n = x^2\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\left(n(n-1)x^{n-2}\right) = \cdots = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$

$\therefore S(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{1-x}$

$\therefore S(-\frac{1}{2})=-\frac{5}{27}$.

例. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

收敛域: $[-1,1)$.

$S(x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{1}{n}x^n+\cdots$

求导 $\Rightarrow S'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\cdots=\frac{1}{1-x}$

$\therefore S(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)$.

$S(x)-S(0)=S(x)-0$.

↑代入 $x=0$ 可得

$\therefore S(x)=-\ln(1-x)$. $x\in[-1,1)$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$

注意到. $\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]' = x^{2n}$

收敛域为 $(-1,1)$.

当 $x \neq 0$ 时, $S(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n}\,dt$

$= \frac{1}{x}\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}\right)dt = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt$

$= \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(-1<x<1$ 且 $x\neq 0)$.

当 $x=0$ 时, $S(0) = 1+0+0+\cdots = 1$.

例. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

收敛域为 $[-1,1]$.

$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$= -\ln(1-x) - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(x\neq 0)$.

$= -\ln(1-x) - \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - x\right)$ $\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots = (x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots)-x$

$= 1-\ln(1-x)+\frac{1}{x}\ln(1-x)$

当 $x=0$. $S(0)=0$. $(-1\le x<1$ 且 $x\neq 0)$.

当 $x=1$. $S(1) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{2}\right) = 1$.

$\therefore$ 综上, $S(x) = \begin{cases} 1-\ln(1-x)+\frac{1}{x}\ln(1-x). & -1\le x<1 \text{ 且 } x\neq 0 \\ 0 & x=0 \\ 1. & x=1. \end{cases}$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

由此求 a_0

Fourier 级数：若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则称

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\quad n=1,2,\cdots$$

为 $f(x)$ 的 Fourier 系数.

称 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 为 $f(x)$ 的 Fourier 级数

记为 $f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

Dirichlet 条件：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，

若 $\begin{cases}① f(x)\text{ 在 }[a,b]\text{ 连续，或只有有限个第一类间断点.}\\ ② f(x)\text{ 在 }[a,b]\text{ 上分段单调或可微}\end{cases}$

则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Dirichlet 条件.

若 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上满足 Dirichlet 条件，则其 Fourier 级数处处收敛，其和函数 $S(x)$ 是以 2π 为周期的函数，

$$S_x=\begin{cases} f(x), & x\in(-\pi,\pi)\text{ 且 }f\text{ 在 }x\text{ 连续}\\ \dfrac{f(x^-)+f(x^+)}{2}, & x\in(-\pi,\pi)\text{ 且 }f\text{ 在 }x\text{ 间断.}\\ \dfrac{f[(-\pi)^+]+f(\pi^-)}{2}, & x=\pm\pi.\end{cases}$$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

若 $f(x)$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数，则有：

$$a_n=0$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n\geq 0).$$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx. \qquad \text{正弦级数}$$

若 $f(x)$ 为 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数，则有：

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n\geq 0)$$

$$b_n=0.$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx. \qquad \text{余弦级数.}$$

将定义于 $[-l,l]$ 上的函数展开为周期为 $2l$ 的 Fourier 级数：

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

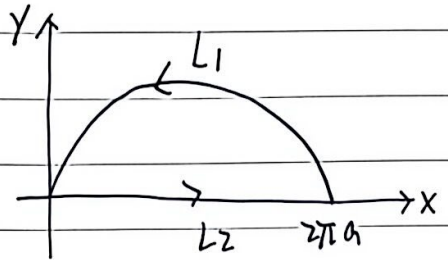
KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 设D为摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$. 的一拱与x轴所围成区域. 求D的面积.



$$S=\int_{L_1} -y\,dx+\int_{L_2} -y\,dx=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,dt$$

$$=4a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\,dt=3\pi a^2.$$

欧拉恒等式:

由 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$

代入 ix, 得

$$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\cdots+\frac{(ix)^n}{n!}+\cdots$$

$$=1+ix-\frac{x^2}{2!}-i\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{(-ix)^n}{n!}+\cdots$$

注意到, $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\cdots$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\cdots$$

从而得 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$

当 $x=\pi$, 有 $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$

$$\Rightarrow e^{i\pi}+1=0.$$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App