微积分下

No. 1

Date

设非零矢量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c}$，$\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$，$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$. 证明：$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 两两互相垂直，且 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$.

证：由 $\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c}$ 知 $\vec{a}\perp\vec{b}$，$\vec{a}\perp\vec{c}$.

同理，$\vec{b}\perp\vec{c}$，$\vec{b}\perp\vec{a}$，$\vec{c}\perp\vec{a}$，$\vec{c}\perp\vec{b}$.

$\therefore \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 两两互相垂直.

$\because |\vec{a}|=|\vec{b}\times\vec{c}|=|\vec{b}||\vec{c}|\sin\langle\vec{b},\vec{c}\rangle=|\vec{b}||\vec{c}|$

同理，有 $|\vec{b}|=|\vec{c}||\vec{a}|$，$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|$

$\therefore |\vec{a}|=|\vec{b}||\vec{c}|=|\vec{a}|^2|\vec{b}||\vec{c}|$

$\Rightarrow |\vec{a}|=1$. 同理有 $|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=1$. □.

设 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}$. 证明 $\vec{a}=\vec{b}$

证：$\because (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}$

$\therefore$ 由 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$ 得 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}=0$

$\Rightarrow 0=|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{b}$.

$\because (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{b}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}$

$\therefore 0=\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2 \Rightarrow |\vec{b}|^2=\vec{a}\cdot\vec{b}$.

由 $(\vec{a}-\vec{b})^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

得 $\vec{a}-\vec{b}=0$

$\therefore \vec{a}=\vec{b}$. □.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

过点(6,2,-4)且在三坐标轴上有相等的非零截距的平面方程是?

设截距为 a.

则有 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$. 代入(6,2,-4) $\Rightarrow a=4$.

$\therefore \pi: x+y+z=4$.

两平行平面 $3x+6y-2z-21=0$ 与 $3x+6y-2z+35=0$ 的距离?

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=8.$$

直线 $\begin{cases} x-y+z+5=0 \\ 5x-8y+4z+36=0 \end{cases}$ 的标准方程是?

$\vec{n_1}=(1,-1,1)$. $\vec{n_2}=(5,-8,4)$

$\therefore \vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=(4,1,-3)$.

取 $x=0$. 则 $\begin{cases} -y+z+5=0 \\ -8y+4z+36=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4 \\ z=-1 \end{cases}$

$\therefore L: \frac{x}{4}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{-3}$

求过点 $A(1,2,3)$ 与直线 $L: x=y=z$ 垂直且与 z 轴相交的直线方程.

L 方向矢: $\vec{s}=(1,1,1)$ 设与 z 轴交点为 $B(0,0,t)$

$\vec{BA}=(1,2,3-t)$. 由 $\vec{BA}\perp\vec{s}$ 得 $\vec{BA}\cdot\vec{s}=0 \Rightarrow t=6$. $\therefore B(0,0,6)$

$\therefore \vec{BA}=(1,2,-3)$.

$\therefore l: \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-6}{-3}$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求通过直线 $L:\begin{cases}x-y+z+1=0\\x-y-z-1=0\end{cases}$ 且垂直于平面 $\pi: x+y+z=0$ 的平面方程.

通过 L 的平面：$x-y+z+1+\lambda(x-y-z-1)=0$

即 $(1+\lambda)x-(1+\lambda)y+(1-\lambda)z+1-\lambda=0$.

$\because \vec{n_\pi}=(1,1,1)$. $\vec{n_{\pi'}}=(1+\lambda,-1-\lambda,1-\lambda)$

且 $\vec{n_\pi}\perp\vec{n_{\pi'}}$

$\therefore 1+\lambda-1-\lambda+1-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=1$

$\therefore \pi'$：$x-y+z+1+x-y-z-1=0$ 即 $x-y=0$

求点 $P(1,3,-4)$ 关于平面 $\pi: 3x+y-2z=0$ 的对称点 Q 的坐标.

记直线 L 为过点 P 且垂直于平面 π 的直线.

$\because \vec{n_\pi}=(3,1,-2)$

$\therefore L$ 的方向矢 $\vec{s}=(3,1,-2)$.

结合 $P(1,3,-4)$，得 $L:\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+4}{-2}=t$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=3t+1\\y=t+3\\z=-2t-4.\end{cases}$$

代入 π 的方程：$3(3t+1)+t+3-2(-2t-4)=0$

解得 $t=-1$

$\therefore L$ 与 π 的交点为 $(-2,2,-2)$. 记为 M.

$\because \vec{PM}=\vec{MQ}$

$\therefore$ 得 $Q(-5,1,0)$.

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

已知两直线 $L_1:\begin{cases}x-3y+z=0\\2x-4y+z=-1\end{cases}$ 和 $L_2:\ x=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$.

求 L_1 与 L_2 间的距离 d.

对 L_1，有 $\vec{n_1}=(1,-3,1)$、$\vec{n_2}=(2,-4,1)$

得 $\vec{s_1}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=(1,1,2)$.

又知，$\vec{s_2}=(1,3,4)$.

取 L_1 上点 $P_1(0,1,3)$. L_2 上点 $P_2(0,-1,2)$.

有 $\overrightarrow{P_1P_2}=(0,-2,-1)$.

$\therefore d=\dfrac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot(\vec{s_1}\times\vec{s_2})|}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\end{cases}$ 在 yOz 面上的投影曲线方程为？①

↳ $x=0$.　　↳ yz 关系式

过曲线 L 的母线平行于 x 轴的投影柱面方程为？②

↳ x 可随便取，故不出现在方程中.

方程组消去 x，得 $y+z=1$.

$\therefore$ ①: $\begin{cases}x=0\\y+z=1\end{cases}$

②: $y+z=1$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

将空间曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=64 & ① \\ y+z=0 & ② \end{cases}$ 以x为参数方程.

由 $y+z=0$. $\Rightarrow z=-y$. 代入式①, 得: $x^2+2y^2=64$.

$\Rightarrow \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{32}=1$

$\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$.

$\therefore$ 令 $\sin\theta=\frac{x}{8}$. $\cos\theta=\frac{y}{4\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=8\sin\theta \\ y=4\sqrt{2}\cos\theta \\ z=-4\sqrt{2}\cos\theta. \end{cases}$

求单叶双曲面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$ ① 与平面 $x-z+2=0$ ② 的交线在xOy平面上的投影曲线方程和以此投影曲线为准线、母线平行于z轴的柱面方程.

↳ 可随便取.

在xOy平面上: $z=0$.

由②式: $z=x+2$. 代入①式得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-(x+2)^2=1$

$\Rightarrow 4y^2-27x^2-144x-180=0$.

$\therefore$ 投影曲线: $\begin{cases} 4y^2-27x^2-144x-180=0 \\ z=0. \end{cases}$

柱面方程: $4y^2-27x^2-144x-180=0$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

求螺旋线 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases}$ $(0\le\theta\le 2\pi)$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程. → 消 θ. 表达两直角坐标关系.

① 在 xOy 平面: 取 $z=0$. 表达 x、y 关系.

$\therefore \begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=0. \end{cases}$

② 在 yOz 平面: 取 $x=0$. 表达 y、z 关系.

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y=a\sin\frac{z}{b}. \end{cases}$

③ 在 xOz 平面: $\begin{cases} y=0 \\ x=a\cos\frac{z}{b}. \end{cases}$

$z=\frac{1}{x^2+y^2-1}$ 的间断点是 $x^2+y^2=1$.

证明极限不存在: $l=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$.

取 $y=kx^3$.

则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx^6}{x^6+k^2x^6}=\frac{k}{1+k^2}$.

当 k 改变, l 亦随之改变. 即: 沿不同曲线 $y=kx^3$ 趋近 $(0,0)$ 时, 极限值不同.

$\therefore$ 极限不存在.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

证明：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在(0,0)点分别对于每个自变量x或y都连续，但作为二元函数在点(0,0)却不连续.

① 对x为自变量：$y=0$.（固定y）.

$f(x,y)=\begin{cases}0 & (x^2+y^2\neq 0)\\ 0 & (x^2+y^2=0)\end{cases}$.

$\because \lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=0=f(0,0)$

$\therefore$ 连续.

在$y=0$这条线上，x分别从0^+、0^-趋近于0，极限值相同

② 对y为自变量，同理.

③ 作为二元函数.

取$y=kx$.

则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{2k}{1+k^2}$

当k改变，lim也随之改变. 即：沿不同直线$y=kx$趋近(0,0)时，极限值不同.

$\therefore$ 不连续. 口.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 求偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x}$.

当 $(x,y)\neq(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{(x^2y^2)'\cdot(x^2+y^2)-x^2y^2\cdot(x^2+y^2)'}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^2(x^2+y^2)-x^2y^2\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

当 $(x,y)=(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0.$$

∴ 综上, $\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

$f(x,y)=\sqrt{x+y}$ 在原点连续但是没有偏导.

∵ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x+y}=0=f(0,0)$

∴ 在原点连续.

∵ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{\Delta x}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$ 不存在.

$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\sqrt{\Delta y}}$ 不存在

∴ 没有偏导

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在原点连续，有偏导但是不可微.

$\because \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0 \quad \lim_{\Delta y\to 0} = 0$

$\therefore$ 有偏导.

$\because \lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta z - [f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y]}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$ 取 $\Delta y = k\Delta x$

$\Downarrow$

$\text{原式} = \lim_{\rho\to 0} \sqrt{\frac{k\Delta x^2}{\Delta x^2+k^2\Delta x^2}} = \lim_{\rho\to 0} |\Delta x| \sqrt{\frac{k}{1+k^2}}$

极限不存在

$\therefore$ 不可微

$\because$ 欲说明 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

$\Leftrightarrow \lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta z - [f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\rho} = 0$ $\therefore$

其中 $\rho = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$

即：实际增量 Δz 与估计增量 $[\ \ ]$ 无限接近.

↑ 在切平面上增加的量.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

设函数 f 二阶偏导数连续. 求到出的二阶偏导数:

(1). $u = f(x, \frac{x}{y})$. 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

$\because \frac{\partial u}{\partial x} = f_1' \cdot 1 + f_2' \cdot \frac{1}{y}$

$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial [f_1' + \frac{1}{y} f_2']}{\partial y} = \frac{\partial (f_1')}{\partial y} + \frac{\partial (\frac{1}{y} f_2')}{\partial y}$

$= f_{11}' \cdot 0 + f_{12}' \cdot (-\frac{x}{y^2}) + (-\frac{1}{y^2}) f_2' + \frac{1}{y} [f_{21}' \cdot 0 + f_{22}' \cdot (-\frac{x}{y^2})]$

$= -\frac{x}{y^2} f_{12}'' - \frac{1}{y^2} f_2' - \frac{x}{y^3} f_{22}''$.

(2). $z = \frac{1}{x} f(xy) + y \varphi(x+y)$. 其中 f, φ 具有二阶连续导数. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$\because \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} f(xy) + \frac{1}{x} f'(xy) \cdot y + y \varphi'(x+y)$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial [-\frac{1}{x^2} f(xy)]}{\partial y} + \frac{\partial [\frac{1}{x} f'(xy) \cdot y]}{\partial y} + \frac{\partial [y \varphi'(x+y)]}{\partial y}$

$= -\frac{1}{x^2} f'(xy) \cdot x + \frac{1}{x} [f''(xy) \cdot x \cdot y + f'(xy) \cdot 1] + 1 \cdot \varphi'(x+y) + y \cdot \varphi''(x+y)$

$= -\frac{1}{x} f'(xy) + y f''(xy) + \frac{1}{x} f'(xy) + \varphi'(x+y) + y \varphi''(x+y)$

$= y f''(xy) + \varphi'(x+y) + y \varphi''(x+y)$.

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

补充结：

	偏导	全导数
函数最终：	多个自变量	一个自变量 ← 函数有复合关系，最终只依赖于一个独立自变量
	仅一个变量变化，其他变量视作常数	所有相关变量都在变，最终由唯一自变量驱动
	e.g. $z=f(x,y)$，且 x,y 相互独立，求 z 对 x 的导数 → $\frac{\partial z}{\partial x}$	e.g. $z=f(x,y)$，$y=y(x)$，则 $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$

补隐函数求导：

I. 一元隐函数，$F(x,y)=0$，$y=y(x)$。

求 $\frac{dy}{dx}$：[法一] 直接求导 注意 y 是关于 x 的函数。

$F_1'+F_2'\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$\Rightarrow$ 可得 $\frac{dy}{dx}=\cdots$

[法二] 公式：$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$ $(F_y\neq 0)$。

II. 多元隐函数，$F(x,y,z)=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial z}{\partial y}$。

[法一] 直接求导 将 z 看作关于 x,y 的函数。

$F(x,y,z)=0$ 两边关于 x 求导 $\Rightarrow z_x$。

[法二] $F(x,y,z)=0$ 两边全微分，由全微分公式 $dz=z_x dx+z_y dy$ 对照得 z_x、z_y。

[法三] 公式。

III. 方程组 $F(x,y,z)=0$，$G(x,y,z)=0$。

若要求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{dz}{dx}$，则方程组两边对 x 求导，再解方程组即可。

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

设 $z=f(x,y)$ 由 $e^z-xyz=0$ 所确定. $x(1-z)\neq 0$. 则 $\frac{\partial z}{\partial x}=?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=?$

① $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-yz}{e^z-xy}=\frac{yz}{e^z-xy}$.

② 法1 将 $\frac{\partial z}{\partial x}$: $\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{xyz-xy}=\frac{z}{x(z-1)}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{x(z-1)}\right)=\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\cdot x(z-1)-z\cdot\left[(z-1)+x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right]}{x^2(z-1)^2}=\frac{z(z^2-2z+2)}{x^2(1-z)^3}.$$

设 $y=f(x,t)$, t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数. $f_t F_y+F_t\neq 0$.

证: $\frac{dy}{dx}=\frac{f_x f_t-f_t F_x}{f_t F_y+F_t}$.

[y 是 x,t 的函数. t 是 x,y 的函数.] ← 变量互相制约. 总共2个方程, 3个变量 $\Rightarrow$ 独立变量数为1.

根据要证的 $\frac{dy}{dx}$, 取独立变量为 x.

设 $G(x,y,t)=f(x,t)-y=0$.

对 $F(x,y,t)$, $G(x,y,t)$ 两边分别对 x 求导,

$$\begin{cases} f_x+f_t\cdot\frac{dt}{dx}-\frac{dy}{dx}=0 \\ F_x+F_y\cdot\frac{dy}{dx}+F_t\cdot\frac{dt}{dx}=0. \end{cases}$$

$\therefore$ 解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{f_x f_t-f_t F_x}{f_t F_y+F_t}$. □.

设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导. $z=z(x,y)$ 是由方程 $xe^x-ye^y-ze^z=0$ 所确定的二元函数. $e^z(z+1)\neq 0$. 求 du. ← x,y 是真正的自变量, 全微分 du 应用 dx 和 dy 来表示.

$du=f_x\cdot dx+f_y\cdot dy+f_z\cdot dz$. (*)

对 $xe^x-ye^y-ze^z=0$ 两边求微分: $d(xe^x)-d(ye^y)-d(ze^z)=0$

$$e^x dx+xe^x dx-e^y dy-ye^y dy-e^z dz-ze^z dz=0$$

$$\therefore dz=\frac{e^x(x+1)}{e^z(z+1)}dx-\frac{e^y(y+1)}{e^z(z+1)}dy.$$

代入(*)式, $du=\left[f_x+\frac{e^x(x+1)}{e^z(z+1)}\right]dx+\left[f_y-\frac{e^y(y+1)}{e^z(z+1)}\right]dy$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No 7

Date

设 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+2y^2+3z^2=20 \end{cases}$ 且 $y(3z+1)\neq 0$. 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$.

3个变量，2个方程 → 1个自由变量，取为 x.

方程组两边对 x 求微分：$\begin{cases} \frac{dz}{dx}=2x+2y\cdot\frac{dy}{dx} \\ 2x+4y\cdot\frac{dy}{dx}+6z\cdot\frac{dz}{dx}=0 \end{cases}$

解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{-x(1+6z)}{2y(1+3z)}$, $\frac{dz}{dx}=\frac{x}{1+3z}$

设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-2x\cos z+y=0$ 所确定. $3z^2+2x\sin z\neq 0$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

方程两边对 x 求偏导：

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-2\cos z\cdot+2x\sin z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2\cos z}{3z^2+2x\sin z}$$

方程两边对 y 求偏导：

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial y}+2x\sin z\frac{\partial z}{\partial y}+1=0$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-1}{3z^2+2x\sin z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2\cos z}{3z^2+2x\sin z}\right)=\frac{-2\sin z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot(3z^2+2x\sin z)-2\cos z\left(6z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+2x\cos z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{(3z^2+2x\sin z)^2}$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=\frac{6z^2\sin z+4x+12z\cos z}{(3z^2+2x\sin z)^3}$$

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No

Date

在原点沿任何方向有方向导数，但没有偏导的函数：$f(x,y)=|x+y|$

$\vec{n}=(a,b)$

方向导数：$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \vec{n}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(0+at,0+bt)}{t\sqrt{a^2+b^2}}=\lim_{t\to 0^+}\frac{|at+bt|}{t\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

$(a^2+b^2\neq 0)$.

∴ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沿任何方向 $\vec{n}$ 均有方向导数.

偏导：$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在

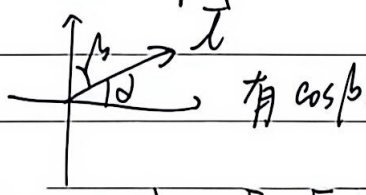
∴ 对 x 的偏导不存在 $\Rightarrow$ 偏导不存在.

求 $u=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 处沿方向 $l=\{\cos\alpha,\cos\beta\}$ 的方向导数，并讨论此方向导数在哪个方向上最大/最小/为0.

$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{n}}=f_x(P_0)\cdot\cos\alpha+f_y(P_0)\cdot\cos\beta$.

∵ $u_x=2x-y$. $u_y=-x+2y$

∴ $\frac{\partial f(1,1)}{\partial \vec{n}}=\cos\alpha+\cos\beta=\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$.



有 $\cos\beta=\sin\alpha$.

∴ 当 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 时，在 $\vec{l}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 方向上，方向导数 Max.

$\alpha=\frac{5\pi}{4}$ 时，在 $\vec{l}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ min

$\alpha=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\frac{7\pi}{4}$ 时，在 $\vec{l}=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ … 为0.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 8

Date

求 $u=\ln(x^2+y^2)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处沿过此点等值线的外法线方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

$\vec{n}=\nabla u(M_0)$.

$\because u_x=\frac{2x}{x^2+y^2}$, $u_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$

$\therefore \vec{n}=\{\frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2},\frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2}\}$. $\Rightarrow \vec{n}^0=\{\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}},\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\}$.

$\therefore$ 方向导数 $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{n}}=u_x\cdot\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}+u_y\cdot\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\frac{2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$

$\uparrow \nabla u(M_0)\cdot\vec{n}^0$

讨论 $f(x,y)=|x+y|$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数的存在性. 沿哪个方向存在方向导数?

[见 Page 下后页. 题1].

曲线 $\begin{cases}x^2-z=0 & ① \\ 3x+2y+1=0 & ②\end{cases}$ 上的点 $(1,-2,1)$ 处的法平面与直线 $\begin{cases}9x-3y-21z=0 \\ x-y-z=0\end{cases}$ 的夹角是?

记 $①$ 于 $F(x,y,z)=x^2-z=0$. $②$ $G(x,y,z)=3x+2y+1=0$.

$\because \nabla F(P_0)=\{2x_0,0,-1\}$

$\nabla G(P_0)=\{3,2,0\}$

$\therefore \nabla F(1,-2,1)=\{2,0,-1\}$. $\nabla G(1,-2,1)=\{3,2,0\}$.

$\therefore$ 曲线切向量 $\vec{n}=\nabla F\times\nabla G=(2,-3,4)$.

对于直线, 两平面法向量: $(9,-3,-21)$. $(1,-1,-1)$.

$\therefore$ 直线方向向量 $\vec{s}=(9,-3,-21)\times(1,-1,-1)=(-14,-12,-2)$.

$\because \vec{n}\cdot\vec{s}=0 \Rightarrow$ 曲线切向量与直线垂直. $\therefore$ 法平面与直线平行. 夹角为0.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ 与椭球 $3x^2+y^2+z^2=16$ 相切. 求 λ.

平面法向量 $\vec{n_1}=(3,\lambda,-3)$. 设切点 $P(x_0,y_0,z_0)$

椭球在 P 内法向量: $\vec{n_2}=\nabla f(P)=(6x_0,2y_0,2z_0)$.

由相切, $\vec{n_1}\parallel\vec{n_2}\Rightarrow\begin{cases}6x_0=3k\\2y_0=\lambda k\\2z_0=-3k.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\frac{1}{2}k\\y_0=\frac{1}{2}\lambda k\\z_0=-\frac{3}{2}k.\end{cases}$

将 x_0,y_0,z_0 代入平面方程与椭球方程:

$\begin{cases}\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}\lambda^2k+\frac{9}{2}k+16=0\\\frac{3}{4}k^2+\frac{1}{4}\lambda^2k^2+\frac{9}{4}k^2=16\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\pm2.\\k=-2\end{cases}$

$\therefore\lambda=+2$ 或 -2.

求由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处指向外侧的单位法向量.

$F(x,y)=0$ 绕 y 轴转 $\Rightarrow F(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0$.

$\therefore$ 旋转面: $3(x^2+z^2)+2y^2=0$ 即 $3x^2+2y^2+3z^2=0$.

$\nabla f(P_0)=\{6x_0,4y_0,6z_0\}$

$\therefore\vec{n}=(0,4\sqrt{3},6\sqrt{2})$

$\Rightarrow\vec{n^0}=(0,\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{15}}{5})$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

设直线 $\begin{cases} x+y+b=0 & ① \\ x+ay-z-3=0 & ② \end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$. 求 a,b.

①: $\vec{n_1}=(1,1,0)$. ②: $\vec{n_2}=(1,a,-1)$.

$\Rightarrow$ 直线方向向量 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=(-1,1,a-1)$.

曲面 $x^2+y^2-z=0$. $\Rightarrow$ 切点处法矢 $\vec{n}=\nabla f(P)=(2,-4,-1)$.

也是平面 π 的法矢.

$\therefore$ 由 $\vec{s}\cdot\vec{n}=0$，得 $-2-4-a+1=0 \Rightarrow a=-5$.

$\because \vec{n}=(2,-4,-1)$. 点 $(1,-2,5)$ 为平面 π 上一点.

$\therefore \pi$: $2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$

即 $2x-4y-z-5=0$.

$\because$ 直线在平面 π 上，

$\therefore$ 取直线上一点 $x=0$, $y=-b$, $z=5b-3$ 也在平面 π 上.

（代入 π 的方程，解得 $b=-2$.

$\therefore$ 综上，$a=-5$. $b=-2$.

设 $f(u)$ 可导. 证明：曲面 $z=xf(\frac{y}{x})$ 上任意一点处的切平面都过原点.

记 $P(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面上任意一点. $F=xf(\frac{y}{x})-z=0$.

$F_x=f(\frac{y}{x})+xf'(\frac{y}{x})\cdot(-\frac{y}{x^2})=f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}f'(\frac{y}{x})$.

$F_y=xf'(\frac{y}{x})\cdot\frac{1}{x}=f'(\frac{y}{x})$.

$F_z=-1$.

$z_0=x_0f(\frac{y_0}{x_0})$

$\therefore$ P点处切平面：$[f(\frac{y_0}{x_0})-\frac{y_0}{x_0}f'(\frac{y_0}{x_0})]\cdot(x-x_0)+f'(\frac{y_0}{x_0})\cdot(y-y_0)+(-1)\cdot(z-z_0)=0$

整理，得 $f(\frac{y_0}{x_0})x-\frac{y_0}{x_0}f'(\frac{y_0}{x_0})x+f'(\frac{y_0}{x_0})y-z=0$

代入 $(0,0,0)$，显然成立.

得证. □

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

求下列函数的极值：

(1). $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

① 无不可导点.

② $\because f_x=e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+x\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-\frac{1}{2}\cdot 2x)=(1-x^2)\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$f_y=x\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-\frac{1}{2}\cdot 2y)=-xy\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$\therefore$ 令 $f_x=0, f_y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases}$

$\therefore$ 驻点：$(1,0)$. $(-1,0)$.

$\because A=f_{xx}=-2x\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}+(1-x^2)\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-\frac{1}{2}\cdot 2x)=(x^3-3x)\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$B=f_{xy}=(1-x^2)\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-\frac{1}{2}\cdot 2y)=(x^2-1)y\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$C=f_{yy}=-x\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}-xy\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\cdot(-\frac{1}{2}\cdot 2y)=x(y^2-1)\cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$

$\therefore$ 对 $(1,0)$: $\Delta=AC-B^2=\frac{-2}{\sqrt{e}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{e}}-0=\frac{2}{e}>0$ 且 $A=\frac{-2}{\sqrt{e}}<0$.

↳ 极大值点. $f(1,0)=\frac{1}{\sqrt{e}}$

对 $(-1,0)$: $\Delta=AC-B^2=\frac{2}{\sqrt{e}}\cdot\frac{1}{\sqrt{e}}-0=\frac{2}{e}>0$ 且 $A=\frac{2}{\sqrt{e}}>0$.

↳ 极小值点. $f(-1,0)=\frac{-1}{\sqrt{e}}$.

(2). $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$

① 无不可导点.

② $f_x=4x^3-2x-2y$. $f_y=4y^3-2x-2y$

$A=f_{xx}=12x^2-2$. $B=f_{xy}=-2$. $C=f_{yy}=12y^2-2$.

令 $f_x=0$. $f_y=0 \Rightarrow x=y=\pm 1$ 或 0.

$\therefore$ 驻点：$(1,1)$. $(-1,-1)$. $(0,0)$

对 $(1,1)$: $\Delta=AC-B^2=10\cdot 10-4=96>0$. $A=10>0$ $\Rightarrow$ 极小值 $f(1,1)=-2$.

对 $(-1,-1)$: $\Delta=AC-B^2=10\cdot 10-4=96>0$. $A=10>0$ $\Rightarrow$ 极小值 $f(-1,-1)=-2$.

对 $(0,0)$: $\Delta=AC-B^2=-2\cdot(-2)-4=0$. 无法使用判别法.

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

取 $\varepsilon>0$. 当 $\varepsilon\to 0^+$, $f(\varepsilon,\varepsilon)=2\varepsilon^4-4\varepsilon^2=2\varepsilon^2(\varepsilon^2-2)<0$

$f(\varepsilon,-\varepsilon)=2\varepsilon^4>0$

$\because f(0,0)=0$

$\therefore$ 在 $(0,0)$ 沿 y 轴分别从 $y=0$ 两侧靠近 $(0,0)$, 一边大于 $f(0,0)$, 一边小于 $f(0,0)$

$\Rightarrow (0,0)$ 不是极值点.

求 $z=3x^2+3y^2-x^3$ 在区域 $D: x^2+y^2\le 16$ 上的最小值.

① 无不可导点,

② $z_x=6x-3x^2$. $z_y=6y$

令 $z_x=0$. $z_y=0$ $\Rightarrow x=0$ 或 2. $y=0$.

$\therefore$ 驻点, $(0,0)$. $(2,0)$. 均在区域 D 内. $\checkmark$

$z(0,0)=0$.

$z(2,0)=4$.

③ 边界: $x^2+y^2=16$.

$\therefore z=48-x^3$

$\because -4\le x\le 4$

$\therefore$ 当 $x=4$ 时, 有 z 在边界上的 $\min = z(4,0)=-16$

$\therefore$ 综上, $\min=\min\{0,4,-16\}=-16$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

求函数 $z=x^2+y^2-xy+x+y$ 在区域 $D: x\le 0, y\le 0, x+y\ge -3$ 上的 Max 与 min.

① 无不可导点.

② $z_x=2x-y+1$. $z_y=2y-x+1$.

令 $z_x=0$. $z_y=0 \Rightarrow x=y=-1$.

∴ 驻点 $(-1,-1)$. $z(-1,-1)=-1$.

③ 边界:

(3.1). $x=0$. $\Rightarrow z=y^2+y=(y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$

$\because \begin{cases} y\le 0 \\ 0+y\ge -3 \end{cases} \Rightarrow -3\le y\le 0$

∴ 当 $y=-\frac{1}{2}$ 时, 有 $min1=-\frac{1}{4}$.

$y=-3$ $max1=6$.

(3.2). $y=0$. $\Rightarrow z=x^2+x=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$.

$\because \begin{cases} x\le 0 \\ x+0\ge -3 \end{cases} \Rightarrow -3\le x\le 0$

∴ 当 $x=-\frac{1}{2}$ 时, 有 $min2=-\frac{1}{4}$.

$x=-3$ $max2=6$.

(3.3). $x+y=-3$. $\Rightarrow y=-3-x \Rightarrow z=3x^2+9x+6=3(x+\frac{3}{2})^2-\frac{3}{4}$.

$\because \begin{cases} x\le 0 \\ y=-3-x\le 0 \end{cases} \Rightarrow -3\le x\le 0$

∴ 当 $x=-\frac{3}{2}$ 时, 有 $min3=-\frac{3}{4}$.

$x=-3$ 或 0 $max3=6$.

∴ 综上, $Max=6$. $min=-1$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求内接于椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的最大长方体的长、宽、高.

设第一卦限的顶点为 (x,y,z). $x>0, y>0, z>0$.

由对称性, $V=8xyz$. 记为 $f(x,y,z)=8xyz$.

要求 $f(x,y,z)$ 在约束 $g(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ 下的 Max.

$$L=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)=8xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

令 $\begin{cases} L_x=8yz+\frac{2\lambda}{a^2}x=0 \\ L_y=8xz+\frac{2\lambda}{b^2}y=0 \\ L_z=8xy+\frac{2\lambda}{c^2}z=0 \\ L_\lambda=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8xyz+\frac{2\lambda}{a^2}x^2=0 \\ 8xyz+\frac{2\lambda}{b^2}y^2=0 \\ 8xyz+\frac{2\lambda}{c^2}z^2=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$. (*).

(*)式代入 $L_\lambda=0$: 得 $\begin{cases} x=\frac{a}{\sqrt{3}} \\ y=\frac{b}{\sqrt{3}} \\ z=\frac{c}{\sqrt{3}} \end{cases}$

由几何意义, 知 Max 必存在.

∴ 当 $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y=\frac{b}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{c}{\sqrt{3}}$ 时取到 $f(x,y,z)$ Max.

∴ 长、宽、高: $\frac{2\sqrt{3}}{3}a$. $\frac{2\sqrt{3}}{3}b$. $\frac{2\sqrt{3}}{3}c$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

在椭球面 $x^2+2y^2+2z^2=1$ 上求一点，使 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在该点处沿方向 $\vec{n}=(0,-1,1)$ 的方向导数最大.

方向导数. 应点乘 $\vec{n}^0$!

$\because f_x=2x,\ f_y=2y,\ f_z=2z.$

$\therefore$ 方向导数 $F(x,y,z)=\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial \vec{n}}=(2x,2y,2z)\cdot\left(0,\dfrac{-1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\sqrt{2}y+\sqrt{2}z.$

记 $G(x,y,z)=x^2+2y^2+2z^2-1=0.$

$\therefore$ 求 $F(x,y,z)$ 在约束 $G(x,y,z)$ 下的 max.

$L=F(x,y,z)+\lambda G(x,y,z)=-\sqrt{2}y+\sqrt{2}z+\lambda(x^2+2y^2+2z^2-1)$

令 $\begin{cases} L_x=2\lambda x=0 \\ L_y=-\sqrt{2}+4\lambda y=0 \\ L_z=\sqrt{2}+4\lambda z=0 \\ L_\lambda=x^2+2y^2+2z^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm\frac{1}{2} \\ z=\mp\frac{1}{2} \end{cases}$

$\therefore$ 可能的最优点：$(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),\ (0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$

$\because F(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=-\sqrt{2},\quad F(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\sqrt{2}$

$\therefore$ 该点为 $(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. ✓

$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,d\sigma=?$

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2} \Rightarrow z^2=R^2-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=R^2.$

$\therefore$ 被积函数为上半球面，半径为 R.

又 $\because D: x^2+y^2\le R^2$ → 圆，半径 R.

$\therefore V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi R^3.$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

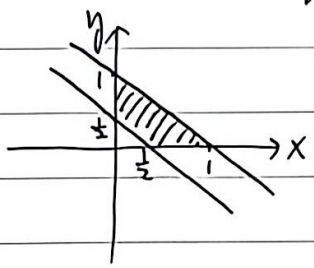
No. 12

Date

设平面区域D由 $x=0$, $y=0$, $x+y=\frac{1}{2}$, $x+y=1$ 围成. 若 $I_1=\iint_D [\ln(x+y)]^7 dxdy$,

$I_2=\iint_D (x+y)^7 dxdy$, $I_3=\iint_D [\sin(x+y)]^7 dxdy$. 求 I_1~I_3 的大小顺序.

区域D:



$\therefore x+y\geq\frac{1}{2}$. $x+y\leq 1$.

$\Rightarrow \ln(x+y)<0 \Rightarrow [\ln(x+y)]^7<0$.

$0<\sin(x+y)<x+y$

$\Rightarrow 0<[\sin(x+y)]^7<(x+y)^7$.

$\therefore I_1<I_3<I_2$

估计 $I=\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}} d\sigma$ 的值, 其中D是正方形域: $\begin{cases}0\leq x\leq 1\\ 0\leq y\leq 2.\end{cases}$

$z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}=\frac{1}{\sqrt{(x+y)^2+16}}$

当 $x\in[0,1]$, $y\in[0,2]$ 时, $z_{min}=\frac{1}{5}$. $z_{max}=\frac{1}{4}$.

$\therefore z_{min}\cdot\sigma\leq I\leq z_{max}\cdot\sigma$.

由 $\sigma=1\times 2=2 \Rightarrow \frac{2}{5}\leq I\leq\frac{1}{2}$.

求 $l=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^2}\iint_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)d\sigma$. 其中D为 $x^2+y^2\leq t^2$ $(t>0)$.

↳ 圆. $\sigma=\pi t^2$

由积分中值定理, $\exists(\xi,\eta)\in D$, 使 $\iint_D e^{x^2-y^2}\cos(x+y)d\sigma=e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)\cdot\pi t^2$.

$\therefore l=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^2}\cdot e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)\cdot\pi t^2=\lim\limits_{t\to 0^+} e^{\xi^2-\eta^2}\cos(\xi+\eta)$.

又∵ 当 $t\to 0^+$, $x^2+y^2\leq 0 \Rightarrow x\to 0$, $y\to 0$

$\therefore l=e^0\cdot\cos 0=1$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

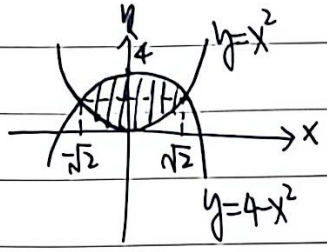
Date

区域D由 $y=x^2$, $y=4-x^2$ 围成. 二重积分 $\iint_D f(x,y)\,d\sigma$.

(1). 先对y后x的两次积分为: $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)\,dy$.

(2). 先x后y的两次积分为: $\int_0^2 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_2^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\,dx$.

D:



→ 拆成上下两部分.

下: 左: $x=-\sqrt{y}$. 右: $x=\sqrt{y}$

上: 左: $x=-\sqrt{4-y}$. 右: $x=\sqrt{4-y}$.

区域D: $x^2+y^2\le 2y$. 则 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ 在极坐标下先对r的两次积分是?

$x^2+y^2-2y\le 0$

$\Rightarrow x^2+(y-1)^2\le 1$

∵ 极坐标转换: $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

∴ $r^2\cos^2\theta+(r\sin\theta-1)^2\le 1 \Rightarrow r^2\le 2r\sin\theta$.

∴ $r\le 2\sin\theta$

又∵ $(0,0)$ 在区域D内

∴ $0\le r\le 2\sin\theta$. ①

∵ $y\ge 0 \Rightarrow r\sin\theta\ge 0$

∴ $\sin\theta\ge 0 \Rightarrow 0\le\theta\le\pi$. ②.

由①, ②: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr$.

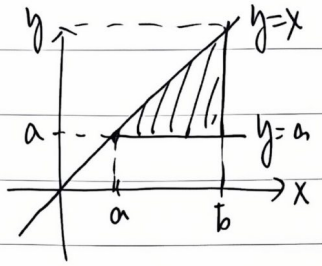
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No 13

Date

函数 $f(x)$ 连续. 证明: $\int_a^b dx \int_a^x f(y)\,dy = \int_a^b (b-x) f(x)\,dx$.

($y=x$ ↙ 上限; $y=a$ ↙ 下限)



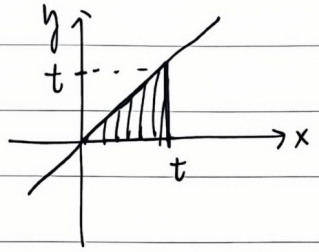
交换积分次序: ($x=b$ 右边界)

$$\text{左边} = \int_a^b dy \int_y^b f(y)\,dx = \int_a^b (b-y) f(y)\,dy = \text{右边}.$$

($x=y$ 左边界) □

$f(x)$ 连续, $F(t) = \int_0^t dy \int_y^t f(x)\,dx$. 求 $F'(2)$.

($x=t$ ↙ 上限; $x=y$ ↙ 下限)



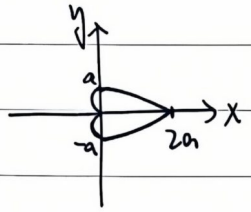
$$F(t) = \int_0^t dy \int_y^t f(x)\,dx.$$

交换积分次序: $F(t) = \int_0^t dx \int_0^x f(x)\,dy$

$= \int_0^t f(x) \cdot x\,dx$ ← 变上限积分.

$\therefore F'(t) = x f(x) \Rightarrow F'(2) = 2f(2)$.

求心形线 $r = a(1+\cos\theta)$, $a>0$ 所围图形面积.



θ	r	直角坐标
0	$2a$	$(2a, 0)$
$\frac{\pi}{2}$	a	$(0, a)$
π	0	$(0, 0)$
$\frac{3\pi}{2}$	a	$(0, -a)$
2π	$2a$	$(2a, 0)$

$\Rightarrow 0 \le \theta \le 2\pi$.

$0 \le r \le a(1+\cos\theta)$.

直接套公式: $S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a(1+\cos\theta)]^2\,d\theta = \cdots\cdots = \frac{3\pi a^2}{2}$.

KOKUYO

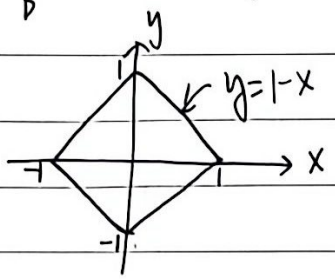
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

求 $I=\iint_D (x^2y^2+x\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy$. 其中 D 为 $|x|+|y|\le 1$.

D:



$$I=\iint_D x^2y^2\,dxdy+\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$$

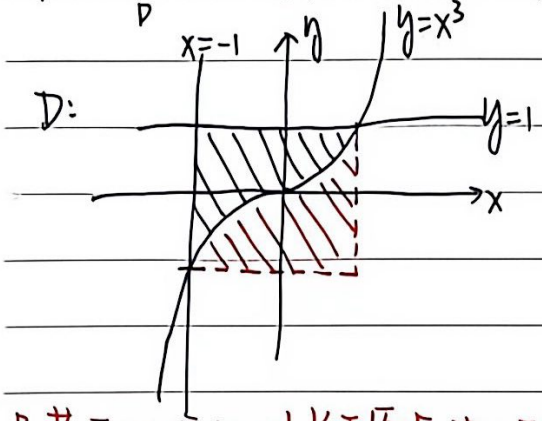
$\because z=x\sqrt{x^2+y^2}$ 关于 x 为奇，且区域 D 关于 y 对称.

$\therefore \iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=0.$

$$\therefore I=\iint_D x^2y^2\,dxdy=4\iint_{\substack{|x|+|y|\le 1\\ x\ge 0,y\ge 0}} x^2y^2\,dxdy=4\cdot\int_0^1 dy\int_0^{1-y}x^2y^2\,dx$$

$$=4\cdot\int_0^1 \frac{1}{3}y^2(1-y)^3\,dy=\text{算.}$$

求 $I=\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]\,dxdy$，其中 D 由 $y=x^3$，$y=1$，$x=-1$ 围成. $f(x)$ 连续.



$$I=\iint_D x\,dxdy+\iint_D xyf(x^2+y^2)\,dxdy.$$

将区域 D "补形" 为：$-1\le x\le 1$，$-1\le y\le 1$ 的正方形.

记红色区域为 D'.

又对 $\iint_{(D)} xyf(x^2+y^2)\,dxdy$ ~~交换 x,y 轮换~~

$=$ ~~相等值~~ $\iint_{(D')} xyf(x^2+y^2)\,dxdy.$

! 若两区域 D，D' 关于原点中心对称，且被积函数 $g(x,y)=g(-x,-y)$，即为关于原点的偶函数，则 $\iint_D g(x,y)\,d\sigma=\iint_{D'} g(x,y)\,d\sigma$

令 $I'=\iint_{D+D'} xyf(x^2+y^2)\,dxdy=2\iint_D xyf(x^2+y^2)\,dxdy.$

$\because D+D'$ 关于 y 轴对称，且 $g(x,y)=xyf(x^2+y^2)$ 是关于 x 的奇函数

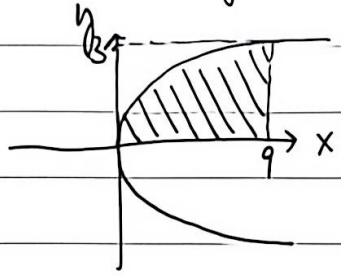
$\therefore I'=0 \Rightarrow \iint_D xyf(x^2+y^2)\,dxdy=0.$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$\therefore I = \iint_D x\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^3}^{1} x\,dy = \int_{-1}^{1} (x - x^4)\,dx = -\frac{2}{5}$.

求 $I = \int_0^3 dy \int_{y^2}^{9} y\sin(x^2)\,dx$. 区域：$y^2 \le x \le 9$. $0 \le y \le 3$.



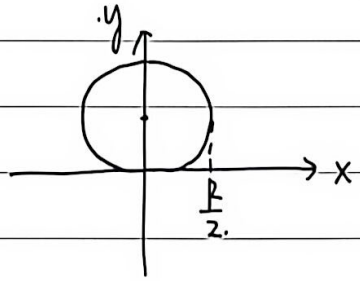
$$I = \int_0^9 dx \int_0^{\sqrt{x}} y\sin(x^2)\,dy = \int_0^9 \frac{1}{2}x\sin(x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^9 \sin(x^2)\,d(x^2) = \frac{1}{4}\int_0^{81} \sin t\,dt$$

$$= \frac{1-\cos 81}{4}$$

求 $I = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dx\,dy$. D是 $x^2+y^2 = Ry$ 所围区域.

$D: x^2 + (y - \frac{R}{2})^2 = \frac{R^2}{4}$.



极坐标：$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$0 \le \theta \le \pi$.

由 $x^2+y^2 \le Ry \Rightarrow r^2 \le R \cdot r\sin\theta$

$\therefore 0 \le r \le R\sin\theta$.

$$\therefore I = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R\sin\theta} \sqrt{R^2 - r^2}\, r\,dr$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R\sin\theta} \sqrt{R^2 - r^2} \cdot \frac{1}{2} dr^2 = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{R^2\sin^2\theta} \sqrt{R^2 - t} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) d(R^2 - t)$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_{R^2}^{R^2\cos^2\theta} -\frac{1}{2}\sqrt{u}\,du = \int_0^{\pi} \left[-\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_{R^2}^{R^2\cos^2\theta} d\theta = \int_0^{\pi} -\frac{1}{3}R^3(|\cos\theta|^3 - 1)\,d\theta$$

↑ 取绝对值　↑ 注意绝对值!

$$= -\frac{1}{3}R^3 \cdot \left[\int_0^{\pi} |\cos\theta|^3 d\theta - \int_0^{\pi} 1 \cdot d\theta\right] = -\frac{1}{3}R^3 \cdot \left[2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,d\theta - \pi\right]$$

↑ Wallis

$$= -\frac{1}{3}R^3 \cdot \left[\frac{4}{3} - \pi\right] = \frac{3\pi - 4}{9}R^3.$$

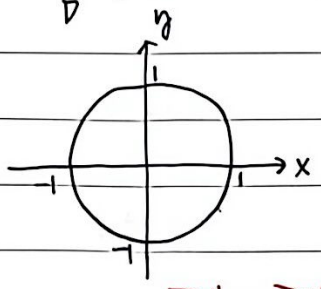
KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

求 $I=\iint_D |y+\sqrt{3}x|\,d\sigma$，其中 D 为 $x^2+y^2\le 1$.



D:

极坐标变换 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

$0\le\theta\le 2\pi$，$0\le r\le 1$. $|y+\sqrt{3}x|=2r\left|\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\right|$

$\therefore I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 2r\left|\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\right|\cdot r\,dr$

积分区间恰好为一个周期.

$=\int_0^{2\pi}\left|\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\right|\left[\frac{2}{3}r^3\right]_0^1 d\theta=\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left|\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\right|d\theta$

or: $\int_0^{2\pi}\left|\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\right|d\theta$ $=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\,d(\theta+\frac{\pi}{3})-\frac{2}{3}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\,d(\theta+\frac{\pi}{3})$

$=\int_0^{2\pi}|\sin\theta|\,d\theta$ $+\frac{2}{3}\int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi}\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\,d(\theta+\frac{\pi}{3})$

$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta$ $=\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin t\,dt-\frac{2}{3}\int_{\pi}^{2\pi}\sin t\,dt+\frac{2}{3}\int_{2\pi}^{\frac{7\pi}{3}}\sin t\,dt$

$=4.$ $=1+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}=\frac{8}{3}.$

求 $I=\iint_D xy\,dx\,dy$，D 是由曲线 $r=1+\cos\theta\ (0\le\theta\le\pi)$ 与极轴所围区域.

$0\le\theta\le\pi$. $0\le r\le 1+\cos\theta$ $xy=r^2\sin\theta\cos\theta$

$I=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{1+\cos\theta}r^2\sin\theta\cos\theta\cdot r\,dr=\int_0^{\pi}\left[\frac{1}{4}r^4\sin\theta\cos\theta\right]_0^{1+\cos\theta}d\theta$

$=\int_0^{\pi}\frac{1}{4}(1+\cos\theta)^4\sin\theta\cos\theta\,d\theta=-\frac{1}{4}\cdot\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\cos\theta\,d\cos\theta$

$=-\frac{1}{4}\int_1^{-1}t(1+t)^4dt=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}t(1+t)^4d(1+t)=\frac{1}{4}\int_0^2(u-1)u^4du$

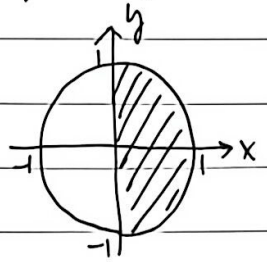
$=\frac{1}{4}\int_0^2(u^5-u^4)du=\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{6}u^6-\frac{1}{5}u^5\right]_0^2=\frac{1}{4}\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right)=\frac{16}{15}.$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求 $I=\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,dxdy$. $D: x^2+y^2\le 1, x\ge 0$.

D:



$$I=\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy+\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dxdy.$$

$\because \frac{xy}{1+x^2+y^2}$ 是关于 y 的奇函数，且 D 关于 x 轴对称.

$$\therefore \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dxdy=0$$

$$\therefore I=\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 \frac{1}{1+r^2}\cdot r\,dr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+r^2}\,d(1+r^2)$$

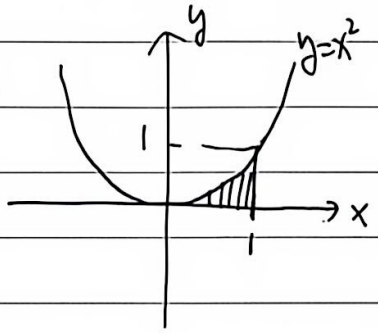
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2 \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}\ln t\right]_1^2 d\theta=\frac{1}{2}\ln 2\cdot\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

设 $f(x,y)$ 连续，$f(x,y)=xy+\iint_D f(x,y)\,dxdy$. D 是由 $y=0, y=x^2, x=1$ 所围区域.
求 $f(x,y)$

令 $C=\iint_D f(x,y)\,dxdy$.

则 $f(x,y)=xy+C$. 代入 $\Rightarrow C=\iint_D (xy+C)\,dxdy$

D:



$$\therefore C=\iint_D xy\,dxdy+C\cdot\iint_D dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} xy\,dy+C\cdot\int_0^1 dx\int_0^{x^2}1\,dy$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{2}x^5\,dx+C\cdot\int_0^1 x^2\,dx$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}C \Rightarrow C=\frac{1}{8}$$

$$\therefore f(x,y)=xy+\frac{1}{8}.$$

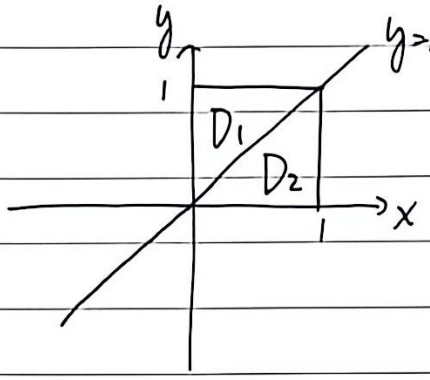
KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

看到 [0,1] & [0,1] 的区域，常使用轮换对称性 ← $y=1$

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$\int_0^1 f(x)\,dx = A$. 求 $I = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x)f(y)\,dy$.

↑ $y=x$



对 I，交换 x, y：

$$I = \int_0^1 dy \int_y^1 f(y)f(x)\,dx = \iint_{D_2} f(x)f(y)\,dx\,dy.$$

$$\therefore I = \iint_{D_1} f(x)f(y)\,dx\,dy = \iint_{D_2} f(x)f(y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_{D_1+D_2} f(x)f(y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 f(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}A \cdot A = \frac{1}{2}A^2.$$

↑ 被积函数相同，可相加积分区域.

↑ $f(x), f(y)$ 函数关于 x, y 独立，则可将二重积分化作一重积分的积.

设 Ω 是球体：$x^2+y^2+z^2 \le 1$. 则 $\iiint_\Omega (3x^2+1)\,dx\,dy\,dz = ?$

x, y, z 地位等同. $\therefore I = \iiint_\Omega (3x^2+1)\,dv = \iiint_\Omega (3y^2+1)\,dv = \iiint_\Omega (3z^2+1)\,dv$

$$\therefore I = \frac{1}{3}\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2+1)\,dv = \iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2+1)\,dv$$

球坐标代换. $0 \le \theta \le 2\pi$. $0 \le \varphi \le \pi$ $0 \le \rho \le 1$. $x^2+y^2+z^2+1 = \rho^2+1$

$$\therefore I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi \int_0^1 (\rho^2+1)\cdot\rho^2\,d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \cdot \frac{8}{15}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{16}{15}\,d\theta = \frac{32\pi}{15}$$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 16.

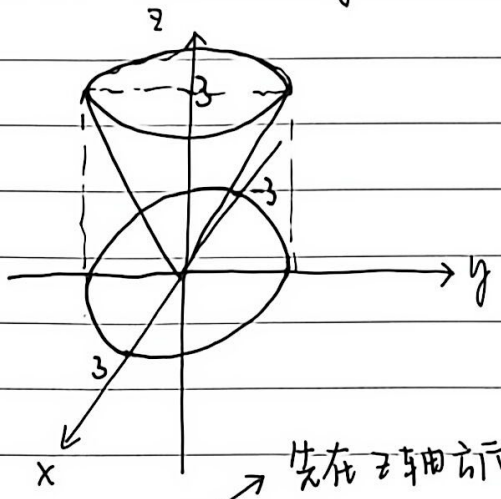
Date

柱坐标下，$\int_{-3}^{3}dx\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3}f(\sqrt{x^2+y^2})\,dz$ 的两次积分为 ? 和 ?

$-3\le x\le 3$. $-\sqrt{9-x^2}\le y\le\sqrt{9-x^2}$. $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 3$.

↓ ↓

$y^2=9-x^2\Rightarrow x^2+y^2=9$ $z^2=x^2+y^2$.



[投影法]. 先在z轴方向上切成一条条"细条". 细条长度 x 投影面面积.

顶：$z=3$. 底：$z=\sqrt{x^2+y^2}=r$.

区域在xy平面的投影 D：$0\le\theta\le 2\pi$, $0\le r\le 3$.

$\therefore I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3 r\,dr\int_r^3 f(r)\,dz$.

[截面法]. → 平行于xy平面，分成一片片"薄圆片"

$0\le z\le 3$.

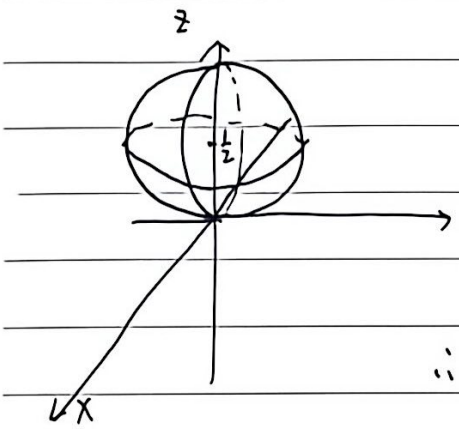
"薄圆片"：$0\le\theta\le 2\pi$. $0\le r\le\sqrt{x^2+y^2}=z$

$\therefore I=\int_0^3 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z f(r)\cdot r\,dr$.

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

球坐标下，$\iiint_{x^2+y^2+(z-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{4}} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dx\,dy\,dz$ 的逐次积分为？



$0\le\theta\le 2\pi$，$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$，

由 $x^2+y^2+z^2-z+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}\Rightarrow x^2+y^2+z^2\le z$

$\Rightarrow \rho^2\le\rho\cos\varphi$

$\therefore 0\le\rho\le\cos\varphi$

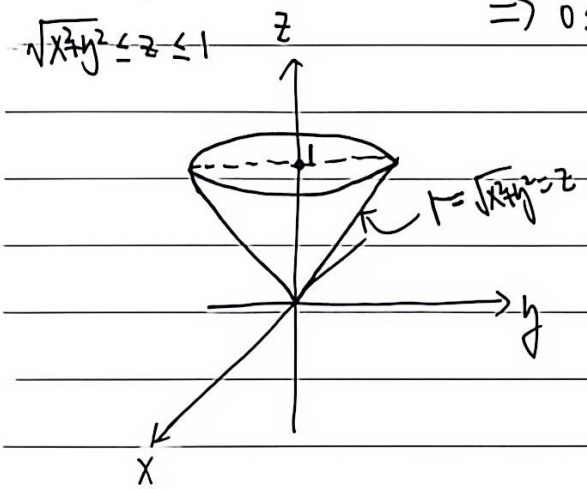
$$\therefore I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\cos\varphi}f(\rho)\rho^2\,d\rho$$

将逐次积分 $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_r^1 r f(z)\,dz$ 化为先对 r 积分，然后对 θ 积分，再对 z 积分的逐次积分。

$r\le z\le 1$，$0\le r\le 1$，$0\le\theta\le 2\pi$。

↓

$\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$



$\Rightarrow 0\le z\le 1$，$0\le\theta\le 2\pi$，$0\le r\le\sqrt{x^2+y^2}=z$

$$I=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z f(z)\,r\,dr.$$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 17

Date

利用二重积分证明：$\dfrac{\int_0^1 xf^2(x)\,dx}{\int_0^1 xf(x)\,dx} \le \dfrac{\int_0^1 f^2(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx}$. 其中 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的正值单调减函数.

证：∵ $0\le x\le 1$. $f(x)>0$

∴ $\int_0^1 xf(x)\,dx>0$. $\int_0^1 f(x)\,dx>0$.

∴ 欲证 $\int_0^1 xf^2(x)\,dx\cdot\int_0^1 f(x)\,dx \le \int_0^1 xf(x)\,dx\cdot\int_0^1 f^2(x)\,dx$

欲证 $\int_0^1 xf^2(x)\,dx\cdot\int_0^1 f(y)\,dy \le \int_0^1 xf(x)\,dx\cdot\int_0^1 f^2(y)\,dy$ （积分值与被积变量的命名无关）

欲证 $\iint_D xf^2(x)f(y)\,d\sigma \le \iint_D xf(x)f^2(y)\,d\sigma$. 其中 D: $0\le x\le 1$. $0\le y\le 1$.

欲证 $\iint_D [xf^2(x)f(y)-xf(x)f^2(y)]\,d\sigma = \underbrace{\iint_D xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\,d\sigma}_{(*)} \le 0$.

对 $(*)$ 式：交换 x,y 变量，得 $(*)=\iint_{D'} yf(y)f(x)[f(y)-f(x)]\,d\sigma$.

积分值与被积变量的命名无关，故可交换变量名称.

其中 D': $0\le y\le 1$, $0\le x\le 1$

发现 $D'=D$.

∴ $(*)=\iint_D xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]\,d\sigma=\iint_D yf(y)f(x)[f(y)-f(x)]\,d\sigma$.

$=\frac{1}{2}\iint_D \{xf(x)f(y)[f(x)-f(y)]+yf(y)f(x)[f(y)-f(x)]\}\,d\sigma$

$=\frac{1}{2}\iint_D f(x)f(y)[f(x)-f(y)](x-y)\,d\sigma$.

∵ $f(x)$ 为 $[0,1]$ 上的↓函数 ⇒ $[f(x)-f(y)]$ 与 $(x-y)$ 异号. ⇒ 乘积 ≤ 0

∴ $(*)\le 0$. □

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

计算：$I=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(\pi x)-\arctan x}{x}dx$.

★ 观察发现，被积函数分子呈现 $f(ax)-f(bx)$ 特征

$\Rightarrow$ 可化作导数的积分：$f(ax)-f(bx)=\int_{bx}^{ax}f'(t)\,dt$.

令 $t=xy$，则 $dt=x\,dy$

将 x 视作常数，y 为变量. $\Rightarrow f(ax)-f(bx)=\int_b^a f'(xy)\cdot x\,dy$.

$\because \arctan(xy)$ 对 y 求导：$\frac{x}{1+(xy)^2}$ $\Rightarrow \arctan(\pi x)-\arctan x=\int_1^{\pi}\frac{x}{1+(xy)^2}dy$

$\therefore I=\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\int_1^{\pi}\frac{x}{1+(xy)^2}dy\right]dx=\int_0^{+\infty}dx\int_1^{\pi}\frac{1}{1+(xy)^2}dy=\iint_D\frac{1}{1+(xy)^2}dx\,dy$

D：$0\le x\le+\infty$

(交换积分次序) $=\int_1^{\pi}dy\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(xy)^2}dx$

$=\int_1^{\pi}\left[\frac{1}{y}\arctan(xy)\right]_{x=0}^{x\to+\infty}dy$

典型特征：交换积分次序后，先积的变量通常会代入无穷大[反常积分].

$=\int_1^{\pi}\frac{1}{y}\cdot\frac{\pi}{2}dy=\frac{\pi}{2}\ln\pi$.

总结：被积函数有同构特征 → 导数的积分. → 尤其针对原函数复杂、导函数简易的情况，可作此变形.

Frullani Integral：$\frac{f(ax)-f(bx)}{x}$ 形式.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 18.

Date

计算 $I=\oint_\Gamma y\,dx+z\,dy+x\,dz$. 其中 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2az.\\ x+z=a.\end{cases}$ $(a>0)$ 且从 z 轴正向看去为逆时针方向.

[法一：化为定积分] 比较麻烦，不推荐.

先将 Γ 方程参数化，再用定积分算.

$\because \Gamma:\begin{cases}x=\frac{a}{2}\cos t\\ y=a\sin t\\ z=a\left(1-\frac{1}{2}\cos t\right)\end{cases}$ t 从 0 到 2π.

$\therefore I=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{a^2}{2}\sin^2 t+a^2\left(1-\frac{1}{2}\cos t\right)\cos t+\frac{a^2}{2}\cos t\sin t\right]dt$

$=\cdots\cdots=-\sqrt{2}\pi a^2.$

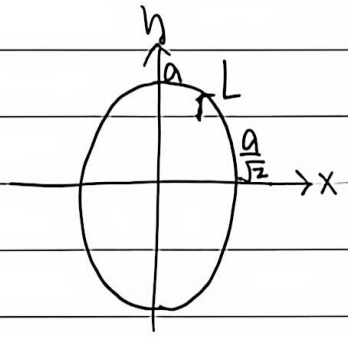
[法二] Γ 方程消去 z，I 中 z 也用 x, y 表达，回归到平面曲线 L 上的积分.

$L: x^2+y^2+(a-x)^2=2a(a-x)\Rightarrow 2x^2+y^2=a^2$. 逆时针.

$I=\oint_L y\,dx+(a-x)dy+x(-dx)=\oint_L \underbrace{(y-x)}_{P}dx+\underbrace{(a-x)}_{Q}dy$

由 Gauss 定理：

$I=\iint_D(-1-1)d\sigma=-2\cdot\pi\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot a=-\sqrt{2}\pi a^2.$



KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

证明 $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$ 在整个 xOy 面内与路径无关，并计算积分值.

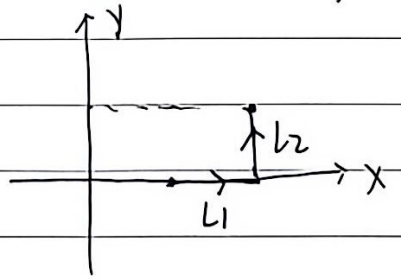
$P(x,y)=2xy-y^4+3$. $Q(x,y)=x^2-4xy^3$

$Q_x=2x-4y^3$. $P_y=2x-4y^3$.

$\because P, Q$ 在 xOy 面内有连续一阶偏导. 且 $Q_x=P_y$

$\therefore$ 积分与路径无关.

[取简单的路径进行计算]



取 L_1: $y=0$, x 从 1 到 2.

L_2: $x=2$, y 从 0 到 1.

L_1 上 $y=0 \Rightarrow dy=0$.

$\therefore I=\int_{L_1}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy+$

$\int_{L_2}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy$

L_2 上 $x=2 \Rightarrow dx=0$

$\Rightarrow I=\int_1^2(2x\cdot 0-0^4+3)dx+\int_0^1(2^2-4\cdot 2\cdot y^3)dy$

$=\int_1^2 3dx+\int_0^1(4-8y^3)dy=3+4-2=5$.

设 $\frac{(x+ky)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某二元函数的全微分/本题意，则 $k=?$

令该为 $u(x,y)$

$du(x,y)=\frac{x+ky}{(x+y)^2}dx+\frac{y}{(x+y)^2}dy=Pdx+Qdy$.

$P=\frac{\partial u}{\partial x}$ $Q=\frac{\partial u}{\partial y}$

则有 $P_y=Q_x \Rightarrow k=2$.

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 19

Date

验证 $ye^{y^2}dx+(xe^{y^2}+2xy^2e^{y^2})dy=0$ 为全微分方程，并求通解.

$P(x,y)=ye^{y^2}$ $Q(x,y)=xe^{y^2}+2xy^2e^{y^2}$

$P_y=e^{y^2}+2y^2e^{y^2}$ $Q_x=e^{y^2}+2y^2e^{y^2}$

∵ P, Q均在 R^2 上一阶连续可偏导. 且 $Q_x=P_y$

∴ 原式为全微分方程.

方法一：凑微分：$ye^{y^2}dx+x(e^{y^2}+2y^2e^{y^2})dy=0$.

↓ 凑项

$ye^{y^2}dx+x\,d(ye^{y^2})=0$.

即：$d(xye^{y^2})=0$.

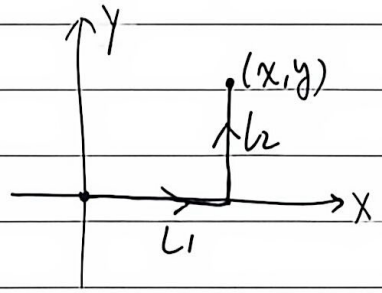
∴ 通解为 $xye^{y^2}=C$.

方法二：积分.

设通解为 $u(x,y)=C$.

$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} ye^{y^2}dx+(xe^{y^2}+2xy^2e^{y^2})dy$ 该积分与路径无关.

取最易计算的起点 $(x_0,y_0)=(0,0)$. 路径为平行于坐标轴的 L_1、L_2.



$u(x,y)=\int_{L_1}0\,dx+\int_{L_2}(xe^{y^2}+2xy^2e^{y^2})dy$

$=\int_0^y x(e^{y^2}+2y^2e^{y^2})dy$

$=\int_0^y x\cdot d(ye^{y^2})=\int_0^{ye^{y^2}} x\,dt$

$=xye^{y^2}$

∴ 通解为 $xye^{y^2}=C$.

KOKUYO