微积分·上

No. 01

Date

例. $f(x)$ 为周期函数，周期为 T. 证：$\frac{T}{2}$ 为 $f(2x+3)$ 的一个周期.

证：令 $f(2x+3)=\varphi(x)$.

即证 $\varphi(x+\frac{T}{2})=\varphi(x)$.

$\varphi(x+\frac{T}{2})=f(2(x+\frac{T}{2})+3)=f(2x+3+T)=f(2x+3)=\varphi(x)$.

□.

例. Dirichlet 函数的周期性.

$D(x+T)=D(x)$. 当 $T=\frac{q}{p}$，显然成立.

∴ T 可以是任何正有理数.

例. 证：两个有界函数的和差积仍是有界函数. (P11. 例3)

证：$f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界.

$\forall M>0$. 找到 $x\in(0,1)$，使 $\frac{1}{x}>M$.

取 $x=\frac{1}{M+1}$，$x\in(0,1)$.

则 $f(x)=M+1>M$. □.

例. 求 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，$x\geq 1$ 的反函数.

↳ $e^y=x+\sqrt{x^2-1}$. ① 法一：移项后平方，去根号.

法二：$(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})=e^y(x-\sqrt{x^2-1})$

$x^2-x^2+1=e^y(x-\sqrt{x^2-1})$

$\Rightarrow \frac{1}{e^y}=x-\sqrt{x^2-1}$ 即 $e^{-y}=x-\sqrt{x^2-1}$ ②

由 $\frac{①+②}{2}$ 得：$x=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$ $y\geq 0$.

双曲余弦. $x=\cosh y$.

KOKUYO

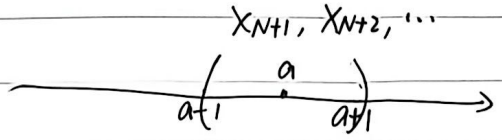
CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

收敛数列有界

设 $x_n \to a$，取 $\varepsilon = 1$.



$\exists N \in \mathbb{N}$，$\forall n > N$，$a-1 < x_n < a+1$.

取 $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, |a|+1\}$.

则 $|x_n| \le M$，$n \in \mathbb{N}$

☆ 取 $|a|+1$ 原因：a 正负不确定.

例：证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

证：$\forall \varepsilon > 0$. 找到 N. 当 $n > N$，$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ 成立.

取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$. ☆ 也可取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$ 证.

当 $n > N$ 时，$n > [\frac{1}{\varepsilon}] + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$ 成立.

例：证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$，$|a| < 1$.

证：1°. $a = 0$. √

2°. $a \neq 0$. 即 $0 < |a| < 1$.

$\forall \varepsilon > 0$. 找到 N，当 $n > N$，$|a^n - 0| < \varepsilon$ 成立.

⇕

$|a^n| < \varepsilon \Leftrightarrow |a|^n < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \ln|a|^n < \ln\varepsilon$

? 取对

⇕

$n \cdot \ln|a| < \ln\varepsilon$

$\Leftrightarrow n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}$

为避免负数.

修改 ε 范围为 $\forall \varepsilon \in (0,1)$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 02

Date

取 $N=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}\right]+1$. 当 $n>N$ 时, $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|a|}$

$\Rightarrow n\ln|a|<\ln\varepsilon$. $\Rightarrow |\ln|a|^n<\ln\varepsilon$ $\Rightarrow |a|^n<\varepsilon$ 成立.

例. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$.

证: $\forall\varepsilon>0$, 找到N, 当 $n>N$, 成立: $\left|\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}-1\right|<\varepsilon$.

$\Leftrightarrow$ 证 $\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^2+1}}<\varepsilon$ (同 $\times(\sqrt{n^2+1}+n)$)

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+1}(\sqrt{n^2+1}+n)}<\varepsilon$ (放缩, 应使左边放大.)

$\therefore$ 只要 $\frac{1}{2n^2}<\varepsilon$ 即 $n^2>\frac{1}{2\varepsilon}$.

取 $N=\left[\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right]$. 当 $n>N$, $n>\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$ $\Rightarrow \left|\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}-1\right|$

$=\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{\sqrt{n^2+1}}$

$=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}(\sqrt{n^2+1}+n)}<\frac{1}{2n^2}<\varepsilon$.

证.

例. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-4}{2n^2-100n+1}=\frac{3}{2}$.

$\forall$: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3-\frac{4}{n^2}}{2-\frac{100}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3-\frac{4}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(2-\frac{100}{n}+\frac{1}{n^2})}=\frac{3-0}{2-0+0}=\frac{3}{2}$.

↑ $\forall$ 不可用除法法则.

因为分子、分母极限均为 $+\infty$.

故先同 $\div n^2$. 构造出有极限的形式.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

证明. 取 $\varepsilon=\frac{a}{2}$.

保号性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$. 则 $\exists N$, $\forall n>N$, $x_n>0$.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 且 $a>b$. 则 $\exists N$, $\forall n>N$, $x_n>b$.

设 $x_n\to a$, $y_n\to b$, 且 $a>b$. 则当 n 充分大, $x_n>y_n$. (保序性)

设 $x_n\geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a\geq 0$.

设 $x_n\geq b$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则 $a\geq b$.

设 $x_n\geq y_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. 则 $a\geq b$.

单调有界数列必收敛.

例. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$. $a>0$.

证: ①. $a=1$. ✓

②. $a>1$.

均值

$$1<\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\underbrace{a\cdot 1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1}_{(n-1)\text{个}1}}\leq\frac{a+n-1}{n}=1+\frac{a-1}{n}$$

↓ 极限为1.

↓

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a-1}{n}\right)=1$$

加法原理.

由"夹逼原理", $y_S=1$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

③. $0<a<1$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}=\frac{1}{1}=1. \quad \square.$$

$\because \frac{1}{a}>1.$

例1. 证明: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

证: $1\le\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdot1\cdots\cdots1}_{(n-2)\text{个}1}}\le\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0.$ $\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}}=0.$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}+n-2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}+1-\frac{2}{n}}{1}=1$$

由"夹逼", $\forall\varepsilon=1.$ $\square.$

$\Rightarrow$ 引申: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=1.$

由课本P27. 例6引申: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}$

$=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}.$

$(k\in\mathbb{N},\ a_i\ge0).$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ $n\geq 1$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛.

证: $x_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+C_n^1\cdot\frac{1}{n}+C_n^2\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+C_n^n\cdot\frac{1}{n^n}$

$=1+1+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{n^3}+\cdots$ 共(n+1)项

$x_{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}\cdot\frac{(n+1)n}{(n+1)^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)}{(n+1)^3}+\cdots$ 共(n+2)项

每一项对应, 显然 $x_{n+1}>x_n$. 即 $\{x_n\}$ 个. 口.

Step 2. ~~证明~~ $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 有上界.

$x_n=(1+\frac{1}{n})^n=1+C_n^1\cdot\frac{1}{n}+C_n^2\cdot\frac{1}{n^2}+C_n^3\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+C_n^n\frac{1}{n^n}$

$=1+1+\frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}+\cdots\cdots$

$\leq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3$. 口.

单调&有界 $\Rightarrow$ 收敛.

$\frac{n!}{2^{n-1}}>1$ $(n\geq 3)$

证明: 若 $\{x_n\}$ 收敛. $\{y_n\}$ 发散. 则 $\{x_n+y_n\}$ 发散.

证: 若 $\{x_n+y_n\}$ 收敛.

$\because \{x_n\}$ 收敛 $\Rightarrow \{x_n+y_n-x_n\}$ 收敛 即 $\{y_n\}$ 收敛

矛盾!. 口.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 04

Date

8. 若 $x_n>0$ 且 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq 0$.

8 不能是 $\lim\limits_{n\to\infty}>0$.

反例：$x_n=\frac{1}{n}$.

例. $x_1=1$. $x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}$. 讨论该数列收敛性，并求极限.

"单调有界收敛原理"

先证单调性：$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}-x_n=\frac{1}{x_n}-\frac{x_n}{2}=\frac{2-x_n^2}{2x_n}$

$\because x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}\geq 2\sqrt{\frac{x_n}{2}\cdot\frac{1}{x_n}}=\sqrt{2}$

$\therefore x_{n+1}-x_n\leq 0 \Rightarrow x_{n+1}\leq x_n$. 单调↓.

又 $\because x_n>0$ 有下界

$\therefore \{x_n\}$ 收敛. 口.

$x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}$ → 两边取极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}\right)$

$\therefore a=\frac{a}{2}+\frac{1}{a}$ ($a\neq 0$，显然. $\because x_{n+1}\geq\sqrt{2}$ $\therefore a\geq\sqrt{2}$).

解得 $a=\sqrt{2}$.

求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$.

类似裂项.

$x_n=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$

$=\frac{n+1}{2n}$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}$.

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. $x_n=\frac{1\cdot3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\cdots\cdot(2n)}$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

提示: $0<x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ (*).

(*) 证明: $x_n^2=\frac{1^2\cdot3^2\cdot\cdots\cdot(2n-1)^2}{2^2\cdot4^2\cdot\cdots\cdot(2n)^2}$

$$\begin{cases}1\cdot3<2^2 \\ 3\cdot5<4^2 \\ \vdots\quad\vdots \\ (2n-1)(2n+1)<(2n)^2.\end{cases}$$ 平移.

连乘. $1\cdot3^2\cdot5^2\cdot\cdots\cdot(2n-1)^2\cdot(2n+1)<2^2\cdot4^2\cdot\cdots\cdot(2n)^2$

$\therefore x_n^2<\frac{1}{2n+1}$.

例. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$

分子、分母有理化.

$=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$.

根号法则: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

证明: $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$.

$\forall\varepsilon>0$, 找 $X<0$, 当 $x<X$, $|2^x-0|<\varepsilon$ 成立.

$2^x<\varepsilon\Rightarrow x\ln2<\ln\varepsilon\Rightarrow x<\frac{\ln\varepsilon}{\ln2}$

取 $X=\frac{\ln\varepsilon}{\ln2}$. 限定 $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$. ← 为了使 $X<0$.

当 $x<X$, $2^x<\varepsilon$ □.

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 证明: $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$. $x \in \mathring{N}(2,\delta)$

证: $\forall \varepsilon > 0$, 找 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x-2| < \delta$ 时, $|x^2-4| < \varepsilon$.

不妨设 $\delta < 1$. $1 < x < 3$. $|x+2| < 5$.

取 $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{5}\}$. 当 $0 < |x-2| < \delta$ 时, $|x^2-4| = |x+2||x-2| < 5|x-2| < \varepsilon$

□.

当 $x \in \mathring{N}(a,\delta)$, $f(x) < g(x)$. $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to a} g(x)$ 都存在. 有:

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x).$$

e.g. $f(x) = x^2$. $g(x) = 0$. $a = 0$.

海涅定理.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x_n \to a,\ x_n \neq a,\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

联系: 数列极限与函数极限.

e.g. 已知. $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

$x_1 = a+1$. $x_2 = a+\frac{1}{2}$. ⋯. $x_n = a+\frac{1}{n}$.

$f(a+1)$. $f(a+\frac{1}{2})$. $f(a+\frac{1}{3})$. ⋯. $f(a+\frac{1}{n})$

↪ 数列 $\lim_{n\to\infty} f(a+\frac{1}{n}) = L$.

$w_1 = a+1$. $w_2 = a-\frac{1}{4}$. $w_3 = a+\frac{1}{9}$. ⋯.

$$\lim_{n\to\infty} f\left(a + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right) = L.$$

KOKUYO

例. 证明: $\lim_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在.

取 $x_n=\frac{\pi}{2}+2k\pi. \to+\infty. \lim_{n\to\infty}\sin x_n=1.$

取 $y_n=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \to+\infty. \lim_{n\to\infty}\sin y_n=-1.$

两极限不等. $\therefore \lim_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在. 口.

例. 求 Dirichlet. 函数 $D(x)$ 在点 $x=0$ 处极限.

取 $x_n=\frac{1}{n}\to 0$ $D(x_n)=1.$ $\therefore \lim_{n\to\infty}D(x_n)=1.$

取 $y_n=\frac{\sqrt{2}}{n}\to 0$ $\lim_{n\to\infty}D(y_n)=0.$

$\therefore \lim_{x\to 0}D(x)$ 不存在

$f(x)$ 极限不存在情况: $(x\to 0)$.

- $f(x)$ 左右极限不相等.
- 函数无界. $\to f(x)=\frac{1}{x}$.
- $f(x)$ 无限振荡. $\to f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

根式法则: 若 $\lim f(x)=A$. 则 $\lim\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{A}$. $n\in\mathbb{N}$

(当 n 为偶, 要求 $f(x)\geq 0$).

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

常用极限：$\lim_{x\to a} C = C$. $\lim_{x\to a} x = a$.

$\lim_{x\to a} x^2 = a^2$. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$. $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$. $(a>0)$.

$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$

$\lim u = 0 \Leftrightarrow \lim |u| = 0$. $\lim u = a \Rightarrow \lim |u| = a$. $(a\neq 0)$.

例. $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$. 当 $x>0$：由 $0 \le \sin x \le x$ 夹逼

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \sin x = 0$.

由于 $\sin x$ 为奇函数. $\therefore \lim_{x\to 0^-} \sin x = 0$.

$\therefore \lim_{x\to 0} \sin x = 0$. □.

例. $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$. 令 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{\lim_{x\to 0}(1-\sin^2 x)}$$

$$= \sqrt{1-(\lim_{x\to 0}\sin x)^2} = 1.$$

例. $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$

$$\text{原式} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}.$$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

$$y_S=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}$$

例. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$.

令 $y=\sqrt[n]{1+x}$. 则 $x=y^n-1$. 当 $x\to 0$, $y\to 1$.

$$y_S=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^n-1}=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+y+1}=\frac{1}{n}.$$

注: 因式分解 $y^n-1=(y-1)(y^{n-1}+y^{n-2}+\cdots+y+1)$.

有界: $\exists M>0, \forall x\in D, |f(x)|\le M$.

无界: $\forall M>0, \exists x\in D, |f(x)|>M$. ①

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}, \exists x_n\in D, |f(x_n)|>n$. ②

$\Leftrightarrow \exists x_n\in D, \lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)|=+\infty$. ③

例. 证明: $f(x)=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 无界

取 $x_n=2k\pi+\frac{\pi}{2}$. $|f(x_n)|=2k\pi+\frac{\pi}{2}>n$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 无界.

利用无界的定义③.

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 07

Date

极限：$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall x\in \mathring{N}(a,\delta),\ |f(x)-L|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq L$.

$\exists \varepsilon>0,\ \forall \delta>0,\ \exists x\in \mathring{N}(a,\delta),\ |f(x)-L|\geq\varepsilon$.

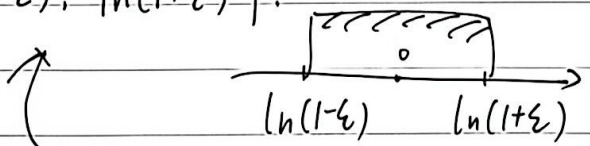
$\Leftrightarrow \exists \varepsilon>0,\ \forall \delta=\frac{1}{n},\ \exists x_n\in \mathring{N}(a,\delta),\ |f(x_n)-L|\geq\varepsilon$.

例. 证明：$\lim\limits_{x\to 0} e^x=1$.

证：$\forall \varepsilon>0$，找 $\delta>0$，使 $0<|x-0|<\delta$ 时：$|e^x-1|<\varepsilon$.

$1-\varepsilon<e^x<1+\varepsilon \Leftrightarrow \ln(1-\varepsilon)<x<\ln(1+\varepsilon)$.

取 $\delta=\min\{-\ln(1-\varepsilon),\ \ln(1+\varepsilon)\}$.



只要使 $x\in(-\delta,\delta)$ 在以上区间以内

例. 求：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}$.　　二项式：$C_n^1=\binom{n}{1}$.

$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}\geq\binom{n}{3}$，$n\geq 3$.

$0\leq\frac{n^2}{2^n}\leq\frac{n^2}{\binom{n}{3}}=\frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)}$. 由夹逼，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$. □

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{100}}{1.1^n}=0$.

$(1.1)^n=(1+0.1)^n=C_n^0+C_n^1\cdot 0.1+C_n^2\cdot(0.1)^2+\cdots+C_n^n\cdot(0.1)^n\geq C_n^{101}\cdot(0.1)^{101}$

例. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}=\frac{2}{1}\cdot\underbrace{\left(\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{n}\right)}\leq\frac{4}{n}$, $n\geq 5$.

由夹逼, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$. 口.

例. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n}}\right)$

先乘 $\left(1-\frac{1}{2}\right)$ 即可. 连锁消去.

例. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{11\cdot 12\cdot\cdots\cdot(n+10)}{2\cdot 5\cdot\cdots\cdot(3n-1)}$.

$y_n=\frac{n+10}{3n-1}$. $x_n=y_1\cdot y_2\cdot\cdots\cdot y_n$. (由 $y_n\to\frac{1}{3}$. 易知 $x_n\to 0$).

$\because\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$.

$\therefore\exists N$, 当 $n>N$, $0<y_n<\frac{1}{2}$.

$0\leq x_n=y_1y_2\cdot\cdots\cdot y_N\cdot y_{N+1}\cdots y_n\leq y_1\cdot y_2\cdot\cdots\cdot y_N\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}=K\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$

$\lim\limits_{n\to\infty}K\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}=0$ $\therefore$ 由夹逼, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. 口.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$.

例. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=AB$.

证: $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1$, 当 $n>N_1$, $|x_n-A|<\varepsilon$.

N_2 $n>N_2$, $|y_n-B|<\varepsilon$.

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$. 当 $n>N$ 时:

$$|x_ny_n-AB|=|x_ny_n-Ay_n+Ay_n-AB|$$

$$\le|x_ny_n-Ay_n|+|Ay_n-AB| \qquad y_n\to B,\ \exists M>0$$

$$=|(x_n-A)y_n|+|A(y_n-B)| \qquad \text{使 } |y_n|\le M \text{ (有界)}$$

$$=\underbrace{|x_n-A|}_{<\varepsilon}|y_n|+|A|\underbrace{|y_n-B|}_{<\varepsilon}<(M+|A|)\varepsilon.$$

$M+|A|$ 为 >0 的常数.

□.

例. 已知 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=B\neq0$. 证明: $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{B}$.

不妨设 $B>0$. $\exists\delta>0$, 当 $x\in\mathring{N}(a,\delta)$, $\frac{B}{2}<f(x)<\frac{3B}{2}$.

$$\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{B}\right|=\frac{|B-f(x)|}{|B||f(x)|}<\frac{2|f(x)-B|}{B^2}$$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{2}{B}|f(x)-B|=0$. $(\because\lim\limits_{x\to B}|f(x)-B|=0)$.

$\therefore\lim\limits_{x\to a}\left|\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{B}\right|=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{B}$

若 $B<0$. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=B<0$ 则 $\lim\limits_{x\to a}-f(x)=-B>0$.

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$\Rightarrow \lim_{x\to a} -\frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{b}$ $\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{b}$. 口.

例. 已知 $x_1=1$. $x_n = 1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$. $n\geq 2$. 讨论 $\{x_n\}$ 敛散性.

显然 $1<x_n<2$. $\longrightarrow$ 有界.

先化简 $x_n = 2-\frac{1}{1+x_{n-1}}$

$x_{n+1}-x_n = (2-\frac{1}{1+x_n}) - (2-\frac{1}{1+x_{n-1}})$

$= \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_{n-1})(1+x_n)}$ 得 $x_{n+1}-x_n$ 与 x_n-x_{n-1} 同号. ☆

已知有 $x_1 < x_2$ 即 $x_2-x_1>0$. $\Rightarrow x_3-x_2>0$. $x_4-x_3>0$. …

递推得 $x_{n+1}-x_n>0$. $\therefore \{x_n\}$ 单调↑.

由单调有界收敛准则, $\{x_n\}$ 收敛.

记 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$.

对 $x_n = 1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 两边取极限: $A = 1+\frac{A}{1+A}$, $1\leq A\leq 2$. $(1+A\neq 0)$

解得 $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 口.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. $x_1=3$. $x_2=3+\frac{1}{3}$. $x_3=3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}$. $\cdots$. $n\geq 2$. 讨论$\{x_n\}$敛散性

$x_n=3+\frac{1}{x_{n-1}}$. 发现无单调性. 分奇偶项为列.

$$x_{n+1}-x_{n-1}=3+\frac{x_{n-1}}{3x_{n-1}+1}-\left(3+\frac{x_{n-3}}{3x_{n-3}+1}\right)$$

$$=\frac{x_{n-1}}{3x_{n-1}+1}-\frac{x_{n-3}}{3x_{n-3}+1}=\frac{x_{n-1}-x_{n-3}}{(3x_{n-1}+1)(3x_{n-3}+1)}$$

$\therefore x_{n+1}-x_{n-1}$ 与 $x_{n-1}-x_{n-3}$ 同号.

由已知, $x_1<x_3$. $\Rightarrow x_1<x_3<x_5<\cdots<x_{2k-1}$.

$\therefore \{x_{2k-1}\}$为单调↑.

同理, 由 $x_2>x_4$ $\Rightarrow \{x_{2k}\}$为单调↓.

设 $\lim_{k\to\infty} x_{2k-1}=l_1$. $\lim_{k\to\infty} x_{2k}=l_2$.

由 $x_{2k}=3+\frac{1}{x_{2k-1}}$ 两边取极限: $l_2=3+\frac{1}{l_1}$. ①

同理, $l_1=3+\frac{1}{l_2}$. ②. $(l_1、l_2\geq 3)$.

由①.②作差: $l_2-l_1=\frac{1}{l_1}-\frac{1}{l_2}$

$\Rightarrow (l_1l_2-1)(l_2-l_1)=0$.

由于 $l_1l_2\neq 1$. $\therefore l_1=l_2$.

$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n=l$. 由 $l=3+\frac{1}{l}$ $\Rightarrow l=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. □.

$X\to$含 $x_{n+1}=g(x_n)$. $g(x)=3+\frac{1}{x}$

说明单调↑: 令 $x_{n+1}=f(x_{n-1})$ 则 $f(x)=3+\frac{1}{3+\frac{1}{x}}$ 严格↑.

扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 求 $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

令 $1-x=t$. 当 $x\to 1$. $t\to 0$.

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0} t\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-t)}{\cos\frac{\pi}{2}(1-t)}\cdot \quad (\text{诱导公式})$$

$$=\lim_{t\to 0} t\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\lim_{t\to 0}\cos\frac{\pi}{2}t$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}t\cdot\frac{2}{\pi}}{\sin\frac{\pi}{2}t}\cdot\lim_{t\to 0}\cos\frac{\pi}{2}t=\frac{2}{\pi}.$$

通常. 若 $\lim_{x\to a} f(x)$. 一个常见的代换为 $x=a+t$. 则 $t=x-a$.

当 $x\to a$, $t\to 0$.

主要目的: 尽量 $\to 0$ 或 $\to\infty$.

例: 证明: 有一个收敛子列的单调数列收敛.

证: 不妨设 $\{x_n\}$ 单调增. 且 $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=L$ (有一个子列收敛于 L).

由极限定义, $\forall\varepsilon>0$, $\exists K$, $\forall k>K$, $L-\varepsilon<x_{n_k}<L+\varepsilon$.

取 $N=n_K$, 当 $n>N$, 必有: $n_j<n\le n_{j+1}$, $j\ge K$.

$\because x_{n_j}, x_{n_{j+1}}\in(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

$\therefore L-\varepsilon<x_{n_j}<x_n\le x_{n_{j+1}}<L+\varepsilon$

$\Rightarrow L-\varepsilon<x_n<L+\varepsilon$. □

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 10.

Date

无穷多个无穷小量之积，不一定是无穷小量.

反例：u_1：$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \to 0$

u_2：$1, 2, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \to 0$

u_3：$1, 1, 9, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \to 0$

u_4：$1, 1, 1, 64, \cdots, \frac{1}{n}, \to 0$.

⋮

积扣1发0.

等价无穷小：$u \sim u$.

$u \sim v \Leftrightarrow v \sim u$.

$u \sim v, v \sim w \Rightarrow u \sim w$

例. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\arctan x}{\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}}$

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^{\frac{3}{4}}} = 1\cdot 0 = 0.$$

例. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} = n,\ n\in\mathbb{N}$

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{nx + o(x)}{x} = n.$$

KOKUYO

No.

Date

例. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3\sin x}-1}{x+x^3}=\dfrac{3}{2}$.

$\because=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{3}{2}\sin x}{x}=\dfrac{3}{2}$.

☆ $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{x}{n}$. $x\to 0$. $\Leftrightarrow \sqrt[n]{1+x}=1+\dfrac{x}{n}+o\left(\dfrac{x}{n}\right)$. $x\to 0$.

$\sqrt[n]{1+u(x)}-1\sim\dfrac{u(x)}{n}$. $u(x)\to 0$.

例. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x^3}=\dfrac{1}{2}$. ? 不可单独替换 $\tan x$.

$$\because=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$.

$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3$. $x\to 0$.

P46. 例3. 法二.

$$\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}\sqrt[n]{1-x}-\sqrt[m]{1+x}}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{x}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\sqrt[m]{1+x}\cdot\frac{\sqrt[n]{1-x}-1}{x}+\frac{1}{m}$$

$$=1\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{m}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}.$$

∴ 提取 $\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)x$. 阿数1.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 11

Date

求主部、阶数：

(1). $2\sin x^3 + x^4$. $x \to 0$

$ys \sim 2\sin x^3 \sim 2x^3$. 主部 $2x^3$. 阶数 3.

(2). x^2-1. $x \to -1$. $x+1 \to 0$.

$x^2-1 \to 0$. $x \to -1$.

$x^2-1 = (x+1)(x-1) \sim -2(x+1)$

$\sim$ 主部. 阶数 1.

由 $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$ 即 $\lim \frac{ys}{(\text{基本无穷小})^k}$ 直至算出极限.

$= \lim_{x\to -1}(x-1) = -2$.

(3). $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$. $x \to 0$.

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$.

$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$.

$ys = x + o(x)$. $\therefore$ 主部 x. 阶数 1.

(4). $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ $x \to 0^+$.

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\sqrt{x}+1} = 1$. $\Rightarrow \sqrt{x+\sqrt{x}} \sim x^{\frac{1}{4}}$

同理：$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \sim x^{\frac{1}{8}}$. 阶数 $\frac{1}{8}$.

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

15). $\sqrt{x}-\sqrt{\frac{x}{1+x}}$. $x\to 0^+$.

$y_5=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\left(\sqrt{1+x}-1\right)$ $\sim\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$

$\sim\sqrt{x}$ $\sim\frac{x}{2}$.

例. $\frac{2x}{x^2+1}\sim\frac{2}{x}$. $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}=2$.

先找一个与 $\frac{2x}{x^2+1}$ 同阶的

$\therefore\frac{2x}{x^2+1}\sim\frac{2}{x}$.

例. 证明: $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{x-1}=\infty$

只要证 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{|x-1|}=+\infty$

$\forall M>0$, 需找到 $\delta>0$, 使: $0<|x-1|<\delta$ 时 $\frac{1}{|x-1|}>M$.

取 $\delta=\frac{1}{M}$ 即可. □.

例. $f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ 求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处极限.

$f(0^+)=\frac{\lim\limits_{x\to0^+}(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\lim\limits_{x\to0^+}(e^{\frac{1}{x}}+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to0^+}(1-\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}})}{\lim\limits_{x\to0^+}(1+\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}})}=1$.

$f(0^-)=\frac{-1}{1}=-1$. $\therefore$ 不存在.

Campus

例. 证明 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

证: 取 $x_0 \in (-\infty,+\infty)$

$$\begin{aligned}|\Delta y| &= |\sin(x+x_0)-\sin x_0| \\ &= |2\cos(x_0+\tfrac{\Delta x}{2})\sin\tfrac{\Delta x}{2}| \quad \text{和差化积.} \\ &\le 2\left|\sin\tfrac{\Delta x}{2}\right| \to 0.\end{aligned}$$

$\therefore \Delta y \to 0$. $\therefore f(x)=\sin x$ 在 x_0 处连续.

$\therefore$ ... 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

定义 $x^{\sqrt{2}}=e^{\sqrt{2}\ln x}$ 需要 $x>0$.

$\sqrt{2}$ 可替换为任何无理数.

幂指函数 $x^x=e^{x\ln x}$. 需 $x>0$.

$(1+\frac{1}{x})^x=e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$. 需 $1+\frac{1}{x}>0$.

$f(x)=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上严格单调且连续. → 反函数.

① $f(x) \in [-1,1]$.

② $\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上严格单调且连续.

$|x|$ 是初等函数吗.

↳ $|x|=\sqrt{x^2}$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点.

↑

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$. 但 $x\neq 0$ (无定义).

补充 $x=0$ 时定义. 令 $F(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

则 $F(x)$ 连续.

例. $f(x)=\frac{1}{x}$. $x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点. 属于无穷间断点.

$g(x)=\sin\frac{1}{x}$. $x=0$ 为 $g(x)$ 的第二类间断点.

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

(分别取 $x_1=\frac{1}{2\pi k}$, $x_2=\frac{1}{2\pi k+\frac{\pi}{2}}$).

例. $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0\\ 2x+b, & x\leq 0\end{cases}$ 定义 $f(0)$ 使 $f(x)$ 连续, 求 b.

$f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+1)=1$.

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+b)=b$.

$\therefore b=1$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2. \quad x\to 0.$

根号规则: $\lim_{x\to a} f(x) = L.$

证明: $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}.$

$g(u)=\sqrt[n]{u}$ 连续.

↑ 初等函数

同理: $\lim_{x\to a}|f(x)| = |\lim_{x\to a} f(x)| = |L|$ $h(u)=|u|$ 连续.

$e^x-1 \sim x \sim \ln(1+x). \quad x\to 0.$

例. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{x} = \ln a.$

$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{r\ln(1+x)}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{r\ln(1+x)}{x} = r.$

$\rightsquigarrow r\ln(1+x)\to 0.$

$\therefore$ $a^x-1 \sim x\ln a.$ $(1+x)^r-1 \sim rx.$ $x\to 0.$

$\tan x \sim \sin x \sim x \sim \arcsin x \sim \arctan x. \quad x\to 0.$

证: 由 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$ 令 $t=\sin x.$ 则 $x=\arcsin t.$

当 $x\to 0,\ t\to 0$

$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{t}{\arcsin t}=1 \Rightarrow t\sim \arcsin t.$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$. $a>0, b>0, a\neq b$.

$a^{x^2}-1=e^{x^2\ln a}-1\sim x^2\ln a$. ← 只需 $a,b\neq 1$. 若则式子 $=0$.

同理, $b^{x^2}-1\sim x^2\ln b$.

$\therefore a^{x^2}-b^{x^2}=(a^{x^2}-1)-(b^{x^2}-1)\sim x^2\ln(\frac{a}{b})$.

$a^x-b^x\sim x\ln(\frac{a}{b})$.

$\therefore ys=\dfrac{1}{\ln(\frac{a}{b})}$ 当 $a=1$ 或 $b=1$, 结论仍成立.

例. 求: $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\cdot(\sin\sqrt{n+1}-\sin\sqrt{n})$

和差化积: $ys=\lim\limits_{n\to\infty}2\sin n\cdot\sin\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}$

$\because 0\le\left|\sin n\cdot\sin\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\cdot\cos\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}\right|\le\left|\sin\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\right|$

$\therefore 0\le|ys|\le\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sin\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right|$

$=\left|\sin\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right|=0$.

$\therefore ys=0$.

幂指函数求极限:

$\lim[a(x)]^{b(x)}=\lim e^{b(x)\ln a(x)}=e^{\lim b(x)\ln a(x)}$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

[法一]

$$y_5=\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}}.$$

原理.

$u(x)\to A,\ v(x)\to B.\quad A,B\neq 0,1$

$$\lim[u(x)]^{v(x)}=\lim e^{v(x)\ln u(x)}=e^{\lim v(x)\ln u(x)}$$

$$=e^{B\ln A}=A^B$$

[法二]. $y_5=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}$

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)}$$

$\because \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos x)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}.$

$\ln t=\ln(1+t-1)\sim t-1.$

$\therefore y_5=e^{-\frac{1}{2}}.$

例. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续. 且 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]$.

证明: $\exists c\in[a,b]$ 使得: $f(c)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$

证: 令 $M=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$. $m=\min\{\cdots\}$.

则 $m\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le M.$

令 $d=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. $e=\max\{\cdots\}$.

则 $f(x)$ 在 $[d,e]$ 上必取到 $\frac{f(x_1)+f(x_2)\cdots+f(x_n)}{n}$ □.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

→ 拓：加权平均.

必 $\exists\ \xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) = t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n)$.

$t_i \geq 0$. $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.

例. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = \frac{1}{2}$. 求 a, b.

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b - \frac{1}{2}\right) = 0$.

令 $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$. $\Leftrightarrow$ 求渐近线 $y = ax + b + \frac{1}{2}$ → 直线.

斜率. $a = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2+x} = 1$.

由 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x - b) = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow -1 - b = \frac{1}{2}$ $\therefore b = -\frac{3}{2}$.

例. 求: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[x]}{x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x}$. ← $\frac{x-1}{x} \leq \frac{[x]}{x} \leq \frac{x}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{[x]}{x} = 0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{[x]}{x} = 1$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[x]}{x} = +\infty$.

∴ 不存在.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 15

Date

例. 求 $\sqrt[3]{\cos x}-1$. $x\to 0$ 主部.

$y_5=(1+\cos x-1)^{\frac{1}{3}}-1 \sim \frac{1}{3}(\cos x-1) \sim \frac{1}{3}\cdot(-\frac{1}{2})x^2=-\frac{1}{6}x^2$.

例. 已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n+2}{x^n+1}$. 讨论 $f(x)$ 的连续性.

分析) 若 $x=\frac{1}{2}$. $f(\frac{1}{2})=2$. 若 $x=2$. $f(2)=1$.

解: ① 当 $|x|<1$.

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n+2}{x^n+1}=\frac{0+2}{0+1}=2$.

② 当 $|x|>1$.

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n+2}{x^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=\frac{1+0}{1+0}=1$.

③. 当 $x=1$. $f(1)=\frac{3}{2}$.

④. 当 $x=-1$. $f(x)$ 无定义.

$\therefore f(x)=\begin{cases}1, & |x|>1\\ \frac{3}{2}, & x=1\\ 2, & |x|<1\end{cases}$

间断点为 $x=\pm 1$.

均为跳跃间断点, 第一类间断点.

其它地方均连续.

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x - 1\right]$.

$\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x - 1 = e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}} - 1 \sim x\ln\frac{2+\cos x}{3}$. $x\to 0$.

$\sim x\left(\frac{2+\cos x}{3} - 1\right)$

$= x\cdot\frac{\cos x - 1}{3}$

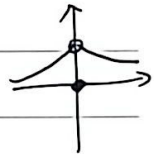
$\sim x\cdot\frac{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{3} = -\frac{1}{6}x^3$.

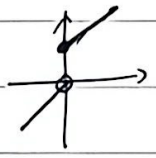
$\therefore y_5 = -\frac{1}{6}$.

? $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$. 要求 α 为常量!!!

$x\to 0$.

间断点
- 第一类
  - 可去 ($\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$. 但 $f(c)\neq L$ 或 $f(c)$ 无定义). → 重新定义 $f(c) = L$ 即可消去间断. "且"
  - 跳跃 ($\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L_1$. $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L_2$. $L_1 \neq L_2$).
- 第二类
  - 无穷 ($f(x)$ 在 c 处自左或右极限为 $\pm\infty$). 可能无定义.
  - 振荡. ($f(x)$ 在 c 处振荡, $\lim$ 不存在且 $\neq\pm\infty$)
    - e.g. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.







Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{7}}{2}\right)^n$

$$y_5=\lim_{n\to\infty} e^{n\ln\frac{\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{7}}{2}}=e^{\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\ln\frac{\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{7}}{2}\right)}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\ln\frac{\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{7}}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{5}-1+\sqrt[n]{7}-1}{2}\cdot n\right)$$

$\ln(1+u)\sim u$, $u\to 0$.

$\ln v\sim v-1$, $v\to 1$.

$$\hookrightarrow \ln\frac{\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{7}}{2}\sim\frac{\sqrt[n]{5}+\sqrt[n]{7}}{2}-1=\frac{\sqrt[n]{5}-1+\sqrt[n]{7}-1}{2}$$

$$\therefore y_5=e^{\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{\sqrt[n]{5}-1}{2}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\frac{\sqrt[n]{7}-1}{2}\right)}=e^{\frac{\ln 35}{2}}=\sqrt{35}$$

$\sqrt[n]{5}-1=5^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}\ln 5$.

$f'(x_0)\Leftrightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$

可导必连续.

连续未必可导. → e.g. $y=|x|$. [左右导不等] $y=\sqrt[3]{x}$. [$y'=+\infty$] 在原点均不可导.

$y=x\sin\frac{1}{x}$ (规定 $y(0)=0$). [$f'(0)=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 极限不存在]

↓ 不可导，但有垂直切线.

拓→ $g(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

$g'(0)=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$. ∴在 $x=0$ 处可导.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. 求 $f'_-(1)$.

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}-\sqrt{\frac{(1+x)(1-x)}{(1-x)^2}}$$

$=-\infty$. ∴不可导.

⚠注意负号.

例. $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$ 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导性.

$f'_-(0)=1$.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-0}{x-0}=1.$$

∴ $f'(0)=1$.

P65. T5.

方法:
$$\lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(a)+a^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(a)(x^2-a^2)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{a^2(f(a)-f(x))}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}f(a)(x+a)-\lim_{x\to a}\frac{a^2(f(x)-f(a))}{x-a}$$

$=2af(a)-a^2f'(a)$. = 方法.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $(\tan\cos e^{x^2})'$

[法一] $y=\tan u.\quad u=\cos w.\quad w=e^r.\quad r=x^2.$

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dw}\cdot\frac{dw}{dr}\cdot\frac{dr}{dx}$$

$$=\sec^2 u\cdot(-\sin w)\cdot e^r\cdot 2x$$

$$=\sec^2(\cos e^{x^2})\cdot(-\sin e^{x^2})\cdot e^{x^2}\cdot 2x$$

[法二] 一层层剥开.

$$y'_x=\sec^2(\cos e^{x^2})\cdot(-\sin e^{x^2})\cdot e^{x^2}\cdot 2x$$

例: $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}.\quad x\in R.$

$y=\arctan x.\quad x=\tan y.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

↑

P. $\sec^2 y=1+\tan^2 y.$

例: $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad -1<x<1.$

$y=\arcsin x.\quad x=\sin y.\quad y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}).$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

对幂指函数较好用.

对数求导法

步骤: $y=x^{\sin x}$ 两边取对 $\ln y=\sin x\ln x$.

两边对 x 求导 $\frac{y'}{y}=\cos x\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}$.

例. 求 $(x^{\sin x})'$ (y)

$y'=y(\ln y)'=x^{\sin x}\cdot(\sin x\cdot\ln x)'$

$=x^{\sin x}\cdot\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$

可导的 奇函数的导数是 偶函数.

偶 奇.

周期 周期.

例. 以 $50\,cm^3/s$ 速度给球打气. 当球半径为 $5cm$ 时 r 的增加速率?

↳ $\frac{dV}{dt}=50\,cm^3/s$. 要求 $\frac{dr}{dt}$.

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$ [即 $V(t)=\frac{4}{3}\pi r^3(t)$.]

对 t 求导: $\frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi\cdot 3r^2\cdot\frac{dr}{dt}$

当 $r=5\Rightarrow\frac{dr}{dt}=\frac{1}{2\pi}\,cm/s$.

判断 $f'_+(a)$ 表示 $f(x)$ 在点 a 的右导数.

$f'(a^+)$ 表示 $f'(x)$ 在点 a 的右极限. $f'(a^+)=\lim\limits_{x\to a^+}f'(x)$.

只可在一个确切的点求导. a^+ 即从右侧趋近 a, 是一个极限过程.

例. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0 \to f'(x)=1\\ \sin x, & x\geq 0 \to f'(x)=\cos x\end{cases}$ 求 $f'_+(0)$. $f'_-(0)$. $f'(0^+)$. $f'(0^-)$.

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x-0}{x-0}=1$.

$f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1$

$f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=1$.

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x}=-\infty$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

例. $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$. 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 不连续.

$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, \quad x\neq 0.$

$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$

→ $f(x)$ 处处可导.

对 $f'(x)$ 求 $x=0$ 处极限: → $x=0$ 的去心邻域, 和 $x=0$ 无关.

$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right)$ 极限不存在.

↑

$\lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x} = 0.$

$\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在.

∴ $f'(x)$ 在 $x=0$ 不连续

可微 ⇔ 可导.

可微 ⇒ 可导: $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$

可导 ⇒ 可微: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)\right] = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\Delta y - \Delta x\cdot f'(x_0)}{\Delta x} = 0$

∴ $\Delta y - \Delta x\cdot f'(x_0) = o(\Delta x)$

即 $\Delta y = \Delta x\cdot f'(x_0) + o(\Delta x)$ ∴ $A = f'(x_0)$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. 求 dy.

[法一]. $dy=y'\cdot dx$. $\because y'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$\therefore dy=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot dx$.

[法二]. $dy=d\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]$ 视作 $d(\ln u)=\frac{1}{u}du$

$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot d(x+\sqrt{1+x^2})$ → 拆开

$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot(dx+d\sqrt{1+x^2})$ → 视作 $d\sqrt{t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}dt$.

$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left[dx+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot d(1+x^2)\right]$

$=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left[dx+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\cdot dx\right]$

$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot dx$.

例. $y=x^2\sin x$. 用微分法求 dy.

$dy=d(x^2\sin x)=\sin x\cdot dx^2+x^2\cdot d\sin x$

$=\sin x\cdot 2x\cdot dx+x^2\cdot\cos x\cdot dx$

$=x(2\sin x+x\cos x)\,dx$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. $y=\begin{cases}2x, & x<0 \\ \ln(1+2x), & x\geq 0\end{cases}$ 求 dy.

① $x<0$. $dy=y'dx=2dx$.

② $x>0$. $dy=y'dx=\frac{1}{1+2x}\cdot 2\,dx$.

③ $x=0$. (看此处是否可导). $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+2x)-0}{x-0}=2$.

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2x-0}{x-0}=2$.

∴可导. 即可微. $\Rightarrow dy=f'(0)\cdot dx=2dx$.

例. 求 $y=\sqrt{x}$ 在点 $x=4$ 处, 当 $\Delta x=0.02$ 时的微分 dy 和改变量 Δy.

$dy|_{x=4}=f'(4)\cdot dx=\frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot dx=\frac{1}{4}dx$.

∵ $dx=0.02$ $\quad dx=\Delta x$.

∴ $dy=\frac{1}{4}\times 0.02=0.005$.

$\Delta y=\sqrt{4.02}-\sqrt{4}=\cdots\cdots$

① $\Delta y\approx dy$.

② $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx f'(x_0)\Delta x$.

例. 近似计算 $\sqrt[5]{30}$. 令 $f(x)=x^{\frac{1}{5}}$. 求 $f(30)$.

注意到, $f(32)=2$.

$\Delta y=f(30)-f(32)\approx dy$.

$x_0+\Delta x$ $\quad x_0$

$dy=f'(x)\cdot dx=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\cdot dx$ $\quad dx=\Delta x=-2$

$\therefore dy|_{x=32}=\frac{1}{5}(32)^{-\frac{4}{5}}\cdot dx=\frac{1}{80}\cdot dx=-\frac{1}{40}$.

$\therefore f(30)-f(32)\approx -\frac{1}{40}\Rightarrow f(30)\approx 1.975$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 设方程 $xy+\ln y=e^x$. 确定函数 $y=f(x)$. 求 $f'(0)$.

步骤:

当 $x=0$, $y=e$. → 点 $(0,e)$ 在 $f(x)$ 图像上.

① $y=y(x)$. 将 y 看作 x 的函数.

② 对方程两边, 同时对 x 求导:

$$\Rightarrow y+xy'+\frac{1}{y}\cdot y'=e^x$$

③ 解出 y': $y'=\dfrac{e^x-y}{x+\frac{1}{y}}=\dfrac{y(e^x-y)}{xy+1}$

$$\therefore f'(0)=y'(0)=\frac{e(e^0-e)}{0\cdot e+1}=e(1-e)$$

↑ $x=0$ 时, $y=e$. 代入.

P82. 例4.

[微分法] 方程两边直接求微分.

↓

优点: x,y 地位等同.

$$3x^2dx+3y^2dy=3(ydx+xdy).$$

$$\Rightarrow x^2dx+y^2dy=ydx+xdy$$

$$\Rightarrow (x^2-y)dx=(x-y^2)dy.$$

目标: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2-y}{x-y^2}$. 代入 $x=y=\frac{3}{2}$ $\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=-1$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

极坐标：$(-r,\theta)=(r,\pi+\theta)$. $r\geq 0$.

$\begin{cases}x=-r\cos\theta\\ y=-r\sin\theta\end{cases}$ $\begin{cases}x=r\cos(\pi+\theta)\\ y=r\sin(\pi+\theta)\end{cases}$

玫瑰线：$r=a\sin n\theta$. $r=a\cos n\theta$ 等.

例. P84. 例10.

steps: ① 化为直角坐标系参数方程 $\begin{cases}x=4\sin^2\theta\cos\theta\\ y=4\sin^2\theta\sin\theta.\end{cases}$

② $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\cdots\cdots$

代入$\theta=$等即得K.

通式：由 $r=r(\theta)$. $\begin{cases}x=r(\theta)\cdot\cos\theta.\\ y=r(\theta)\cdot\sin\theta.\end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{r'(\theta)\cdot\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cdot\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$

$(e^x)^{(n)}=e^x$. $(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$.

$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$.

$(a^x)''=a^x\cdot\ln a\cdot\ln a$

$\vdots$ $\vdots$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

$(\sin x)' = \cos x$.

$(\sin x)'' = -\sin x$.

$(\sin x)''' = -\cos x$.

$(\sin x)'''' = \sin x$. 具有周期性!

$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

同理.

$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{x^{n+1}}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} = (-1)\cdot x^{-2}$

$\left(\frac{1}{x}\right)'' = (-1)\cdot(-2)\cdot x^{-3}$

$\left(\frac{1}{x}\right)''' = (-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot x^{-4}$.

⋮ ⋮

[线性代换] $[f(ax+b)]^{(n)} = a^n \cdot f^{(n)}(ax+b)$. 令 $u = ax+b$.

$[f(u)]^n = a^n \cdot f^{(n)}(u)$

例. 求 $[\sin(2x+1)]^{(n)}$.

$[\sin(2x+1)]' = 2\cdot\sin\left(2x+1+\frac{\pi}{2}\right)$.

$[\sin(2x+1)]'' = 2\cdot 2\cdot\sin\left(2x+1+\frac{2\pi}{2}\right)$.

⋮ ⋮

$\therefore [\sin(2x+1)]^{(n)} = 2^n\cdot\sin\left(2x+1+\frac{n\pi}{2}\right)$.

第n阶线性代换,此处 $f(ax+b) = \sin(2x+1)$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $y=\frac{1}{1-x}$ 的 n 阶导.

由 $\left(\frac{1}{t}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{t^{n+1}}$, $y^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}\quad (-1)^n=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

例. 求 $y=\ln(1+x)$ 的 n 阶导.

$y'=\frac{1}{1+x}$. $\Rightarrow y^{(n)}=(y')^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(1+x)^n}\cdot(1)^{n-1}$

$=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(1+x)^n}$

由于定义 $0!=1$. $\therefore n\geq 1$ 均满足.

例. $y=\frac{3x}{2x^2+x-1}$. 求 $y^{(n)}$.

分母 $2x^2+x-1=(2x-1)(x+1)$

则必有: $y=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{x+1}$ 其中 A、B 为常数.

$\because A(x+1)+B(2x-1)=3x$

$\therefore$ 令 $x=\frac{1}{2}\Rightarrow A=1$.

令 $x=-1\Rightarrow B=1$.

(也可用待定系数法. 左右 x 前系数、常数项均相等).

$\therefore y=\frac{1}{2x-1}+\frac{1}{x+1}$.

$\therefore y^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(2x-1)^{n+1}}\cdot 2^n+\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x+1)^{n+1}}$

D. $\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n\cdot a^n\cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. $y = x^2 \sin 3x$, 求 $y^{(20)}$.

$$y^{(20)} = C_{20}^0 x^2 \cdot (\sin 3x)^{(20)} + C_{20}^1 \cdot (x^2)^{(1)} + (\sin 3x)^{(19)} + C_{20}^2 (x^2)^{(2)} \cdot (\sin 3x)^{18} + C_{20}^3 (x^2)^{(3)} \cdot (\sin 3x)^{17} + \cdots$$

后面的项全为0

(因为 $(x^2)^{(n)}$, $n \geq 3$ 时为0)

$$= x^2 \cdot \sin\left(3x + \frac{20\pi}{2}\right) \cdot 3^{20} + 20 \cdot 2x \cdot \sin\left(3x + \frac{19\pi}{2}\right) \cdot 3^{19} + 190 \cdot 2 \cdot \sin\left(3x + \frac{18\pi}{2}\right) \cdot 3^{18}$$

$= \cdots\cdots$ 化简即可.

例. $y = \frac{x^2}{1-x}$. 求 $y^{(100)}$.

$$y = \frac{x^2-1+1}{1-x} = -x - 1 + \frac{1}{1-x}$$

$$\therefore y^{(100)} = (-x-1)^{(100)} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(100)} = 0 + \frac{(-1)^{100} \cdot 100!}{(1-x)^{101}} \cdot (-1)^{100}$$

例. $y = \frac{e^x}{x}$. 求 $y^{(n)}$.

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{(k)} \cdot (e^x)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} \cdot e^x$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k n! e^x}{(n-k)! x^{k+1}} = n! e^x \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(n-k)! x^{k+1}}$$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$(x^n)^{(n+1)} = 0$. $(x^n)^{(n)} = n!$ $(x^n)^{(n-1)} = n! \cdot x$.

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} m\cdot(m-1)\cdots(m-n+1)\cdot x^{m-n}, & n<m \\ m! & n=m \\ 0 & n>m. \end{cases}$$

例. 隐函数. $y = f(x+y)$. 求 y''

steps.

① $y = y(x)$.

② 对 x 求导 $\Rightarrow$ $y' = f'(x+y)\cdot(1+y')$

得 $y' = \dfrac{f'(x+y)}{1-f'(x+y)}$

$= -1 + \dfrac{1}{1-f'(x+y)}$

代入.

③ 再求一次 $\Rightarrow$ $y'' = -\dfrac{1}{[1-f'(x+y)]^2}\cdot[-f''(x+y)]\cdot(1+y')$

得 $y'' = \dfrac{f''(x+y)}{[1-f'(x+y)^3]}$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 参数形式求二阶导.

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \quad 求 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}$$

$$\text{所以: } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt} = \frac{\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)'}{a(1-\cos t)} = \frac{\cos t(1-\cos t) - \sin t \cdot \sin t}{a(1-\cos t)^3}$$

$$= \frac{\cos t - 1}{a(1-\cos t)^3} = \frac{-1}{a(1-\cos t)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^2}}{x'(t)}$$

$$= \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}.$$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 反函数求二阶导.

$y=f(x)$. $x=\varphi(y)$ 互为反函数.

$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$ 即 $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ (x,y 对应).

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\varphi''(y)=\frac{d}{dy}[\varphi'(y)]=\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{f'(x)}\right]$$

$$=-\frac{1}{[f'(x)]^2}\cdot f''(x)\cdot\frac{dx}{dy}$$

$$=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \qquad \because \frac{dx}{dy}=\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}.$$

例. 求 $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{1}{x-1}}-1}$ 的间断点.

可能: $x=0$, $x=1$.

$f(0^+)=-\infty$. $f(0^-)=+\infty$. $\therefore x=0$ 为无穷间断点.

$f(1^+)=0$. $f(1^-)=-1$. $\therefore x=1$ 为跳跃间断点.

例. 求 $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}$ $=-\frac{3}{2}$.

$$L=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1+x}}{x^2}-\sqrt{\frac{1-2x}{x^2}}=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1+x}}{-x}-\frac{\sqrt{1-2x}}{(-x)}\ \text{?}\ \text{符号}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\frac{3x}{-x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-2x})}=\lim_{x\to0^-}\frac{3}{-(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-2x})}=-\frac{3}{2}.$$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 求 $L=\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

指明因 lim 不存在.
因此不能直接把 lim 移到 sin 内部.

$$L=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi).$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=(-1)^n\cdot\sin\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0.$$

连续:

$$\lim_{y\to x}f(y)=f(x).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0. \leftrightarrow \lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x)-f(x)]=0.$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=f(x)$$

例. 证明 $3ax^2+2bx-a-b=0$ $(a\neq 0)$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一根.
构造辅助函数 $F(x)$, 使 $F'(x)$ 与目标相同.

$\therefore$ 令 $F(x)=ax^3+bx^2-(a+b)x$

① $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. (初等函数, 显然).
② 在 $(0,1)$ 上可导.
③ $F(0)=F(1)=0$.
$\therefore$ 由 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $F'(\xi)=0$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，且 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)\equiv$ 常数.

证：右侧区间 $[a,x]$，$a<x\le b$.

由 Lagrange 中值定理：$f(x)-f(a)=f'(\xi)(x-a)=0$.

由 $\sin x-\sin y=(x-y)\cos\xi$.

$\Rightarrow |\sin x-\sin y|\le |x-y|$.

$\Rightarrow |\sin x|\le |x|$.

例. 证明 $\frac{a}{1+a}<\ln(1+a)<a$. $(a>0)$

构造辅助函数 $F(t)=\ln(1+t)$.

区间 $[0,a]$

$F(a)-F(0)=F'(\xi)(a-0)$ 即 $\ln(1+a)-0=\frac{1}{1+\xi}\cdot a$

由 $0<\xi<a$，

$\frac{a}{1+a}<\ln(1+a)<a$. □.

例. $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上均二阶可导，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，$g''(x)\neq 0$.

证明：(1). (a,b) 内 $g(x)\neq 0$.

(2). (a,b) 内 $\exists\xi$，$\frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

(1). 反证法. 假设 $g(x_0)=0$，$x_0\in(a,b)$.

$\because g(a)=0$，$g(b)=0$.

$\therefore$ 由 Rolle 定理，$\exists\xi_1\in(a,x_0)$，$g'(\xi_1)=0$.

$\exists\xi_2$ $g'(\xi_2)=0$.

由 Rolle，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，$g''(\xi)=0$. 与题设矛盾.

$\therefore g(x)\neq 0$，$x\in(a,b)$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

(2). $f(\xi)g''(\xi) - g(\xi)f''(\xi) = 0$

构造辅助函数.

$F(x) = f(x)g'(x) - g(x)f'(x)$.

$F(a) = 0$. $F(b) = 0$.

∴ 由 Rolle 定理, $\exists \xi \in (a,b)$, $F'(\xi) = 0$. 口.

例. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, $(0,1)$ 可导. $f(0) = 0$. $f(1) = 0$.

证明: $\exists \xi \in (0,1)$, $f'(\xi) - 2f(\xi) = 0$.

一项有系数, 一项无系数, 考虑构造 $F(x) = f(x) \cdot e^{kx}$.

构造 $F(x) = e^{-2x} \cdot f(x) = f(x) \cdot e^{-2x}$

$F'(x) = f'(x) \cdot e^{-2x} - 2f(x) \cdot e^{-2x}$

$= [f'(x) - 2f(x)]e^{-2x}$.

$F(0) = F(1) = 0$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^a} = 0$. $a > 0$.

(→平缓, →陡.)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{a^x} = 0$. $a > 1$.

当 $x \to +\infty$,

$\ln(\ln x) \ll \sqrt[k]{\ln x} \ll \ln x \ll x^k \ll k^x$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 2x}{\ln\tan 3x}$.

$$\text{ys}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\tan 2x}\cdot\sec^2 2x\cdot 2}{\frac{1}{\tan 3x}\cdot\sec^2 3x\cdot 3}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\tan 3x}{\tan 2x}\right)\cdot\left(\frac{\sec^2 2x}{\sec^2 3x}\right)\cdot\frac{2}{3}=1.$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{2x}=\dfrac{3}{2}$.

例. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

[法一]. $e^x-e^{\sin x}=e^{\xi}(x-\sin x)$. ξ 介于 x, $\sin x$ 之间.

(Lagrange). 当 $x\to 0$, $\xi\to 0$.

$$\therefore \text{ys}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\xi}(x-\sin x)}{x-\sin x}=1.$$

[法二]. $\text{ys}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}(x-\sin x)}{x-\sin x}=1.$

(更常见).

$(e^{x-\sin x}-1)\sim(x-\sin x)$.

$x-\sin x\to 0$.

例. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$?. 不可直接拆开. $+\infty-(+\infty)$ 大小未知.

$$\text{ys}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x\cdot x}\ \text{洛}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}.$$

$e^x-1\sim x$. $x\to 0$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$. 幂指函数. 通常做法.

$$y_S = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}.$$

考虑 $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$

化为 $\frac{\infty}{\infty}$, 便于洛必达

$\therefore y_S = e^0 = 1.$

例. 求 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

$$y_S = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x}{2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{a^x+b^x}{2}}.$$

考虑 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\cdot\ln\dfrac{a^x+b^x}{2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\frac{a^x+b^x}{2}}{x}$

($\infty\cdot 0$ 形式). ($\frac{0}{0}$ 形式, 洛)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{a^x+b^x}\cdot\frac{a^x\ln a + b^x\ln b}{2}}{1} = \frac{\ln ab}{2} = \ln\sqrt{ab}.$$

$\therefore y_S = e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

$$y_5=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}}$$

$$\text{幂底指数}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\overset{\text{洛}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore y_5=e^{-\frac{1}{2}}.$$

再洛

例. 求 $L=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\ln\arctan(x+1)-\ln\arctan x\right)$.

$$L=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\ln\frac{\arctan(x+1)}{\arctan x}$$

$\ln V\sim V-1$, $V\to 1$.

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{\arctan(x+1)-\arctan x}{\arctan x},\quad \arctan x\to\frac{\pi}{2}.$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\arctan(x+1)-\arctan x}{\frac{1}{x^2}}$$

$\overline{n}$洛.

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{-2}{x^3}}=\frac{2}{\pi}.$$

4X简即可.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\underbrace{o((x-a)^n)}_{\text{Peano 余项}}.$$

$$\uparrow$$

Lagrange 余项: $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

其中 ξ 介于 a、x 之间.

例. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)-x\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-x+\frac{1}{2}x^3-o(x^3)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

例. 求 $\cos 2x-\dfrac{1}{e^{2x^2}}$, $x\to 0$ 的主部.

$$\cos 2x=1-\frac{1}{2!}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4+o(x^4)=1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^4).$$

$$e^{-2x^2}=1+(-2x^2)+\frac{(-2x^2)^2}{2!}+o(x^4)=1-2x^2+2x^4+o(x^4)$$

$$\therefore \text{原式}=-\frac{4}{3}x^4+o(x^4).\quad \text{主部为 } -\frac{4}{3}x^4.$$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x - e^{-2x^2}}{x^2(x+\ln(1-x))}$

分子 $= -\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$.

分母: $\ln(1-x) = (-x) + \frac{-1}{2}(-x)^2 + o(x^2) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

$\Rightarrow$ 分母 $= -\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$.

$\therefore$ 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4 + o(x^4)} = \frac{8}{3}$.

若 $f^{(n)}(a)$ 存在, 且在区间 $(a-r, a+r)$, $r>0$ 上, 有:

$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$.

则必有: $c_0 = f(a)$. $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$. $k = 1, 2, \cdots, n$.

例. 求 $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ 的 6 阶 Maclaurin 公式和 $f^{(6)}(0)$. ← 最高次项为 x^6 即可. 注意用余项表示.

由 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \dfrac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}x^2 + o(x^2)$

得 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$.

$\Rightarrow f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^6 + o(x^6)$.

$\because \frac{3}{8} = \dfrac{f^{(6)}(0)}{6!}$ $\therefore f^{(6)}(0) = 270$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

例. $\sin^2 x = \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}\cdot 2^{2m-1}}{(2m)!}\cdot x^{2m} + o(x^{2n})$.

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})\right]$

$= -\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{(2m)!}(2x)^{2m} + o(x^{2n})$ ✓.

例. 求 $\ln(x^2-1)$ 关于 $x-3$ 的 Taylor 展开式.

(即为关于 $x=3$ 的 Maclaurin 展开.

$\ln(x^2-1) = \ln(x-1) + \ln(x+1)$

$= \ln(x-3+2) + \ln(x-3+4)$.

$= \left[\ln 2 + \ln\left(1+\frac{x-3}{2}\right)\right] + \left[\ln 4 + \ln\left(1+\frac{x-3}{4}\right)\right]$.

构造 $\ln(1+t)$ 形式. 代入公式即可.

$= \ln 8 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(\frac{x-3}{2}\right)^m + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(\frac{x-3}{4}\right)^m + o\left((x-3)^n\right)$.

$= \ln 8 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m}\right)(x-3)^m + o\left((x-3)^n\right)$.

(本质与课本 P110. 例6 换元法相同).

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right) = 1 - \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$.

↑ 在 $x=0$ 处补充定义，即可有 Maclaurin 展开.

例. 求 $x - \arctan x$，$x \to 0$ 的主部.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\arctan x}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\alpha(1+x^2)x^{\alpha-1}}$$

$\to 1$

必有 $\alpha = 3$.

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{x-\arctan x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3(1+x^2)x^2} = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ 主部为 $\frac{1}{3}x^3$.

例. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，$(0,1)$ 可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$.
证明：$\forall a,b>0$，$\exists$ 不同的 $\xi,\eta \in (0,1)$ 使 $\frac{a}{f'(\xi)} + \frac{b}{f'(\eta)} = a+b$.

$\frac{\frac{a}{a+b}}{f'(\xi)} + \frac{\frac{b}{a+b}}{f'(\eta)} = 1$. 令 $\lambda = \frac{a}{a+b} \in (0,1)$.

即：$\frac{\lambda}{f'(\xi)} + \frac{1-\lambda}{f'(\eta)} = 1$.

← 介值定理

$\exists c \in (0,1)$，$f(c) = \lambda$.

$\exists \xi \in (0,c)$，$f'(\xi) = \frac{f(c)-f(0)}{c-0} = \frac{\lambda}{c}$.

$\exists \eta \in (c,1)$，$f'(\eta) = \frac{f(1)-f(c)}{1-c} = \frac{1-\lambda}{1-c}$.

} Lagrange.

$\therefore \frac{\lambda}{f'(\xi)} + \frac{1-\lambda}{f'(\eta)} = c + 1 - c = 1$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

类似介值定理.

Darboux 定理: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导且 $f'_+(a) \neq f'_-(b)$, 则介于 $f'_+(a)$, $f'_-(b)$ 之间的所有值都可为 $f'(x)$ 取到.

证: 不妨设 $f'_+(a) < k < f'_-(b)$

要证 $\exists c \in (a,b)$ 使 $f'(c) = k$.

构造辅助函数: 令 $F(x) = f(x) - kx$.

则 $F'_+(a) = f'_+(a) - k < 0$. $F'_-(b) > 0$.

由保号性, $F'_+(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{F(x) - F(a)}{x - a} < 0$

$\therefore F(x) - F(a) < 0$ 即 $F(x) < F(a)$.

同理, 得 $F(x) < F(b)$.

$\therefore F(x)_{min}$ 在 (a,b) 上取到 (端点不是最小值).

$\uparrow$ 开区间 $\Rightarrow$ 必为极小值. 不妨记 $F(c)$ 为极小值.

由 Fermat 定理, $F'(c) = 0$. $\therefore f'(c) = k$.

例. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, $(0,1)$ 可导. $f(0) = 0$. $f(1) = \frac{1}{2}$.

证明: $\exists$ 不同的 $\xi, \eta \in (0,1)$ 使 $f'(\xi) + f'(\eta) = \xi + \eta$.

$\Leftrightarrow$ 证 $f'(\xi) - \xi + f'(\eta) - \eta = 0$.

令 $F(x) = f(x) - \frac{1}{2}x^2$. $F(0) = 0$. $F(1) = 0$.

$\Leftrightarrow$ 证 $F'(\xi) + F'(\eta) = 0$

由 Lagrange: $\exists \xi \in (0, \frac{1}{2})$. $F'(\xi) = \dfrac{F(\frac{1}{2}) - F(0)}{\frac{1}{2} - 0} = 2F(\frac{1}{2})$.

$\exists \eta \in (\frac{1}{2}, 1)$. $F'(\eta) = \dfrac{F(1) - F(\frac{1}{2})}{1 - \frac{1}{2}} = -2F(\frac{1}{2})$.

$\therefore F'(\xi) + F'(\eta) = 0$. 口.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. $f(x)$. $[0,1]$ 连续. $(0,1)$ 可导. $f(0)=f(1)>0$. $f(\frac{1}{2})=1$.

证: (1). $\exists \eta \in (0,1)$ 使 $f(\eta)=\eta$.

(2). $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\exists \xi \in (0,1)$ 使 $f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1$.

(1). 令 $F(x)=f(x)-x$. $F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. $F(1)=-1$.

由零点定理, $\exists \eta \in (\frac{1}{2},1) \subset (0,1)$ 使 $F(\eta)=0$ 即 $f(\eta)=\eta$.

(2). $\Leftrightarrow f'(\xi)-1-\lambda[f(\xi)-\xi]=0$.

$\Leftrightarrow F'(\xi)-\lambda F(\xi)=0$

令 $G(x)=e^{-\lambda x}\cdot F(x)$. $G(0)=0$. $G(\eta)=0$.

$G'(x)=e^{-\lambda x}[F'(x)-\lambda F(x)]$. ☆ 类似 $f'(x)+g'(x)f(x)$ 的形式都可用 $e^{g(x)}\cdot f(x)$ 构造.

由 Rolle, $\exists \xi \in (0,\eta) \subset (0,1)$ 使 $G'(\xi)=0$ 即 $F'(\xi)-\lambda F(\xi)=0$

□.

例. $f(x)$ 二阶可导. $f''(x)$ 在 a 的邻域连续.

证明: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)+f(a-x)-2f(a)}{x^2}=f''(a)$.

$\frac{0}{0}$, 洛. $\text{ys}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(a+x)-f'(a-x)}{2x}$ (用洛) $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(a+x)+f''(a-x)}{2}$

即 $f'(x)$ 在 a 点可导.

仅一点可导, 不能洛.

$=f''(a)$. ($f''(x)$ 在 a 邻域连续 → 可直接代入 $x\to 0$). $\lim\limits_{x\to a} f''(a)=f''(a)$

→ 改: $f''(a)$ 存在. 求证上式.

由 Taylor 公式: $f(a+x)=f(a)+f'(a)x+\dfrac{f''(a)}{2}x^2+o(x^2)$

$f(a-x)=f(a)+f'(a)(-x)+\dfrac{f''(a)}{2}x^2+o(x^2)$

两式相加即证.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

不可直接两边求导. 题目仅给出 $f(x)$ 在 0 处可导.

例. $f(1+x)=2f(x)$. $f'(0)=1$. 求 $f'(1)$.

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2f(\Delta x)-2f(0)}{\Delta x}=2f'(0)=2.$$

例. $y=f^2(x)$. $V=f(x)$ 的反函数为 $x=\varphi(V)$. $\varphi'(V)=\frac{1}{2+\sin V}$.

$f(0)=\frac{\pi}{2}$. 求 $y'(0)$.

由 $y=f^2(x)$. $\xrightarrow{\text{对}x\text{求导}}$ $y'=2f(x)f'(x)$. $\Rightarrow y'|_{x=0}=2f(0)f'(0)$

$f'(0)=\frac{1}{\varphi'(\frac{\pi}{2})}=3$. $\therefore y'(0)=3$元.

$f''(a)=0$. $f'''(a)\neq 0$. $x=a$ 为拐点.

$f''(x)=f''(a)+f'''(a)\cdot(x-a)+o(x-a)$

$=0+(x-a)\cdot[f'''(a)+\underbrace{o(1)}_{\text{无穷小量, 忽略.}}]$

$\therefore f'(x)$ 在 a 两侧异号.

$\Rightarrow$ 推广. $f''(a)=0$. $f'''(a)=0$. $f^{(4)}(a)\neq 0$. $\to x=a$ 不是拐点.

$f''(x)=f''(a)+f'''(a)\cdot(x-a)+\frac{1}{2}f^{(4)}(a)(x-a)^2+o[(x-a)^2]$

$=(x-a)^2\cdot[\frac{1}{2}f^{(4)}(a)+o(1)]$.

$\to f''(x)$ 在 a 两侧同号.

$f''(a)=f'''(a)=f^{(4)}(a)=0$. $f^{(5)}(a)\neq 0$

$\to x=a$ 是拐点.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 30.

Date

水平渐近线: $\lim_{x\to+\infty} y = A$. $\lim_{x\to-\infty} y = A$. $\Rightarrow l: y = A$

铅直渐近线: $\lim_{x\to a^{\pm}} y = \pm\infty$. $\Rightarrow l: x = a$.

斜渐近线: $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (kx+b)] = 0$ $\Rightarrow l: y = kx+b$

$\therefore \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)-(kx+b)}{x} = 0 \leftarrow \frac{0}{\infty} = 0$

$\Downarrow$

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$.

$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx]$

要求二者极限都存在，才有斜渐近线.

例. 求 $y = x + e^{-x}$ 渐近线

① y 连续. 无铅直 $\vdots$.

② $\lim_{x\to+\infty} (x+e^{-x}) = +\infty$. $\lim_{x\to-\infty} (x+e^{-x}) = \lim_{t\to+\infty} (e^t - t) = +\infty$.

$\therefore$ 无水平 $\vdots$.

$e^t > 2t$. $(t\to+\infty)$

$\lim_{t\to+\infty} \frac{et}{t} = +\infty$ 洛.

③ $k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+e^{-x}}{x} = 1$. $b = \lim_{x\to+\infty} (x+e^{-x}-x) = 0$

$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-e^{-x}}{1} = -\infty$

$\therefore$ 仅 $l: y = x$.

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. $y=\frac{x}{x+2}+\ln(1+e^x)$.

① $\lim_{x\to+\infty} y=+\infty$. $\lim_{x\to-\infty} y=1$. ∴ 水平 $l: y=1$.

② 铅垂：考察分母为0的"断点".

$\lim_{x\to-2^+} y=-\infty$. $\lim_{x\to-2^-} y=+\infty$.

∴ 铅垂 $l: x=-2$.

③ 由于在 $x\to-\infty$ 已有水平，故只考察 $x\to+\infty$ 的斜

$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=1$.

(洛)

$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{x+2}+\ln(1+e^x)-kx\right]=1$

∴ 斜 $l: y=x+1$.

$\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^x)-x=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^x)-\ln e^x$

$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^x}{e^x}=\ln\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{e^x}$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

弧微分 $\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$

$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$

曲率 $|K| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right| = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$|K| = \frac{|y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)|}{[x'^2(t) + y'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}.$$

圆 $\begin{cases} x = a\cos t. \\ y = a\sin t. \end{cases}$ $a>0$ 的曲率

$x'(t) = -a\sin t.\quad x''(t) = -a\cos t.$

$y'(t) = a\cos t.\quad y''(t) = -a\sin t.$

$$\therefore |K| = \frac{|-a\sin t\cdot(-a\sin t) - (-a\cos t)\cdot a\cos t|}{[(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{|a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t|}{(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a}.$$

设 $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0.\quad f^{(n)}(a) \neq 0.$

则当 n 为奇. a 不是极值点.

n 为偶. a 是极值点.

用 Taylor 展开证.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Data

$a,b>0$. $p,q>1$. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则有:

$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geq ab$. → 证法二. 两边取对. 则变成 $f(x)=\ln x$ 严格凸的函数定义式: $f[tx_1+(1-t)x_2]\geq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$.

证: 两边同 $\div b^q$: $\Leftrightarrow$ 证 $\frac{a^p b^{-q}}{p}+\frac{1}{q}\geq ab^{1-q}$.

令 $x=ab^{1-q}$. $\Leftrightarrow$ 证 $f(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{1}{q}-x\geq 0$ → 课本P132例11.

$(b^{(1-q)p}=b^{p-qp}=b^{-q})$.

$\Leftarrow pq=p+q$

P114. 习题. T9.

Taylor 展开至 n 阶

$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot h^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot h^{n+1}$ $\xi=a+\eta_1 h$. $\eta_1\in(0,1)$

由题中 $f(a+h)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\cdot h^k+\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}\cdot h^n$

$\therefore \frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}\cdot h^n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot h^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot h^{n+1}$

$\Rightarrow f^{(n)}(a+\theta h)=f^{(n)}(a)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}\cdot h$

↳ $f^{(n)}(a+\theta h)-f^{(n)}(a)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}\cdot h$. $\xi_2=a+\eta_2 h$. $\eta_2\in(0,\theta)$

由 Lagrange, $\theta h\cdot f^{(n+1)}(\xi_2)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1}\cdot h$ $\Rightarrow \theta=$!!!!!!

$\therefore \lim_{h\to 0}\theta=$!!!!!! $=\frac{1}{n+1}$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

若 $f(x)$ 严格凹：

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \le \frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right]$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取 "$=$".

$$f(t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_nx_n) \le t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+\cdots+t_nf(x_n).$$

$$t_i \ge 0,\quad \sum_{i=1}^{n} t_i = 1.$$

由 $f(x)=\ln x$ 严格凸 $\rightarrow$ 均值不等式.

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \ge \frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right].$$

$$\Rightarrow \ln\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \ge \frac{1}{n}(\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$ 当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$, 取 "$=$".

若 $f(x)$ 存在跳跃间断点 / 可去间断点. 则 $f(x)$ 无原函数.
(即：导函数不存在 D1 类间断点).

连续函数必有原函数.

例. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$.

$\because f(x)=\frac{1}{x} \rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$\therefore$ 在 $(-\infty,0)$. $(0,+\infty)$ 分别讨论.

$\int \frac{1}{x}dx = \ln(-x)+C$.

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$.

$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$.

$\int f'(x)\,dx = f(x)+C$.

$\int df(x) = \int f'(x)\,dx = f(x)+C$.

例1. $\int 2^x e^x\,dx = \int (2e)^x\,dx = \frac{(2e)^x}{\ln 2e} + C$.

例1. $\int \tan^2 x\,dx = \int (\sec^2 x - 1)\,dx = \tan x - x + C$.

例1. $\int \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int \frac{1-\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C$.

例1. $\int \frac{1}{1-\cos 2x}\,dx = \int \frac{1}{2\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{2}\cot x + C$.

例1. $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int \frac{4}{\sin^2 2x}\,dx = -2\cot 2x + C$.

[三角] $= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = \tan x - \cot x + C$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

若 $F'(u)=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 可微.

则：$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x))+C$.

应用中：$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du = F(u)+C = F(\varphi(x))+C$.

令 $u=\varphi(x)$.

则 $du=\varphi'(x)\cdot dx$

例. $\int 2x\cos x^2 dx$

令 $u=x^2$. $du=2x\,dx$

$\therefore$ 原式 $=\int \cos u\,du = \sin u + C = \sin x^2 + C$.

例. $\int \frac{dx}{x(3+2\ln x)}$

令 $u=\ln x$. $du=\frac{1}{x}dx$

$\therefore$ 原式 $=\int \frac{1}{3+2u}du = \frac{1}{2}\ln|3+2u| + C = \frac{1}{2}\ln|3+2\ln x| + C$.

例. $\int x^3(2x^4-1)^5 dx$

~~原式 $=\int (2x^4+1)^5 \cdot 4dx^4$.~~

令 $u=2x^4-1$. $du=8x^3\cdot dx$

$\therefore$ 原式 $=\frac{1}{8}\int 8x^3(2x^4-1)^5 dx = \frac{1}{8}\int u^5 du = \frac{1}{48}u^6 + C$

$= \frac{1}{48}(2x^4-1)^6 + C$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. (slides. P14). $\int x^3(1-5x^2)^{10}\,dx$.

令 $u=1-5x^2$. $du=-10x\,dx$.

$$\text{原式}=-\frac{1}{10}\int -10x^3(1-5x^2)^{10}\,dx = \cdots = -\frac{1}{10}\int u^{10}\cdot\frac{1-u}{5}\cdot du$$

$$=-\frac{1}{50}\int(u^{10}-u^{11})\cdot du = -\frac{1}{50}\left(\frac{1}{11}u^{11}-\frac{1}{12}u^{12}\right)+C.$$

例. $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a}+C.$

↳ $\int\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\cdot dx$. 令 $u=\frac{x}{a}$ 即可.

同理, $\int\frac{1}{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C.$ → $\int\frac{1}{3+2x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\frac{3}{2}+x^2}\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(\sqrt{\frac{3}{2}})^2+x^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\frac{2x}{\sqrt{6}}+C$$

例. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$. $a>0$.

↳ $=\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\cdot\frac{1}{2a}\cdot dx$. 且 $x\in(-\infty,-a)\cup(-a,a)\cup(a,+\infty)$.

要分段讨论且.

例. $\int\cot x\,dx$

$$=\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int\frac{1}{\sin x}\,d\sin x = \ln|\sin x|+C.$$

例. $\int\sec x\,dx = \int\frac{1}{\cos x}\,dx = \int\frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int\frac{1}{\cos^2 x}\,d\sin x$

$$=\int\frac{1}{1-\sin^2 x}\,d\sin x = \int\frac{1}{1-u^2}\,du = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C = \ln|\sec x+\tan x|+C.$$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. $\int \sin^2x\cos^3x\,dx$

$= \int \sin^2x\cos^2x\cos x\,dx$ ← 令 $u=\sin x$, $du=\cos x\cdot dx$ → $= \int u^2(1-u^2)\,du = \int (u^2-u^4)\,du$

$= \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C = \cdots$

$\int \sin^3x\cos^2x\,dx = \int \sin^2x\cos^2x\,\sin x\,dx = \cdots\cdots$

凑 dx 时应将 $\sin x$ 分出来 ↳ $= -d\cos x$

令 $v=\cos x$ 即可.

→ 总结. $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$ 型.

① 若 m, n 中有一个奇数 → 分出来. 三角代换

② m, n 均为偶 → 倍角公式降次.

例. $\int \cos 2x\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos x+\cos 5x)\,dx = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C$

积化和差!

例. $\int \frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx$

分母 $(x^2+2x+3)'$ 求导 $= 2x+2$

$y_S = \int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx + \int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+3} + \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} + \int \frac{1}{v^2+2}\,dv = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$

令 $u=x^2+2x+3$ ↑ ↑ 令 $v=x+1$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan e^x + C.$

令 $u = e^x$.

例. $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx \quad \to \quad 0 < x < 1.$

$ys = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \frac{2}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx$

令 $u = \sqrt{x}$. $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

$= \int \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}} = 2\arcsin\sqrt{x} + C.$

例. $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx.$

令 $u = a^2 - x^2$. $du = -2x\,dx$.

$ys = \int -\frac{1}{2} \cdot \frac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C.$

例. $\int \frac{\ln(1+x) - \ln x}{x(1+x)} dx$

令 $u = \ln\frac{1+x}{x}$. $du = \frac{x}{1+x} \cdot \frac{x-(1+x)}{x^2} = -\frac{1}{x(1+x)} dx$

$\therefore ys = \int -u \cdot du = -\frac{1}{2}u^2 + C = -\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+x}{x}\right)^2 + C.$

例. $\int \frac{6^x}{9^x - 4^x} dx = \int \frac{\frac{6^x}{4^x}}{\frac{9^x}{4^x} - 1} dx = \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 1} dx.$

令 $u = \left(\frac{3}{2}\right)^x$. $du = \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \ln\frac{3}{2}\,dx$. $\therefore ys = \int \frac{1}{\ln\frac{3}{2}} \cdot \frac{du}{u^2-1}$

$= \frac{1}{2\ln\frac{3}{2}} \cdot \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C.$ 二小

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

对 $\int f(x)dx$. 令 $x=g(t)$. 则 $y_S=\int f(g(t))\,g'(t)\,dt \xrightarrow{\text{求积分}} =\varphi(t)+C$.
由反函数，$t=h(x)$. $\Rightarrow y_S=\varphi(h(x))+C$.

要求 $x=g(t)$：可导，严格单调.
$h(x)$ 也需可导.

例. $\int x\sqrt{1-x}\,dx$.
即：$x=g(t)$.
令 $t=\sqrt{1-x}$ $\rightarrow$ $x=1-t^2$. $t\in(0,+\infty)$.
即 $t=h(x)$.
$\therefore y_S=\int(1-t^2)\cdot t\cdot(-2t)\,dt=\int 2(t^4-t^2)\,dt=\frac{2}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+C$
$=\frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+C$.
再代回.

例 $\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}\,dx$.

令 $x=t^6$. $t\in(0,+\infty)$. ← 为了同时换掉 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt[3]{x}$.
$t=\sqrt[6]{x}$
$\therefore y_S=\int\frac{6t^5\,dt}{t^3(1+t^2)}\,dt=6\int(1-\frac{1}{1+t^2})\,dt=6t-6\arctan t+C$
$=\cdots\cdots$

例. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=\int\frac{e^x\,dx}{e^x\sqrt{1+e^x}}=\int\frac{du}{u\sqrt{1+u}}$

令 $t=\sqrt{1+u}\Rightarrow t^2-1=u$. $\therefore y_S=\int\frac{2t\,dt}{(t^2-1)\cdot t}=\int\frac{2dt}{t^2-1}$
$=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\cdots$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

P6. 遇 "$\sqrt{x^2+a^2}$" 形式 → 三角代换 ☆

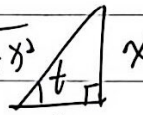
例. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ $a>0$.

$x\in(-\infty,+\infty)$. 由 $\tan^2t+1=\sec^2t$ → 借此去根号

∴ 令 $x=a\tan t$ $\quad t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

$$\therefore ys=\int \frac{d\,a\tan t}{\sqrt{a^2\sec^2t}}=\int \frac{a\,d\tan t}{a\cos t}=\int \frac{\frac{1}{\cos^2t}\,dt}{\frac{1}{\cos t}}=\int \frac{dt}{\cos t}$$

$$=\ln|\sec t+\tan t|+C.$$



回代 t: $ys=\cdots\cdots=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-\ln a+C$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C'.$$

例. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $a>0$.

分 $x\in(a,+\infty)$. $x\in(-\infty,-a)$ 两个区间讨论.

① $x\in(a,+\infty)$. 由 $\sec^2t-1=\tan^2t$. ∴ 令 $x=a\sec t$. $t\in(a,+\infty)$

∴ $\sec t\in(1,+\infty)$ → $\cos t\in(0,1)$ → $t\in(0,\frac{\pi}{2})$.

$$\therefore ys=\int \frac{a\,d\sec t}{a\tan t}=\int \sec t\cdot dt=\ln|\sec t+\tan t|+C.=\cdots$$

② $x\in(-\infty,-a)$. 令 $x=a\sec t$. 发现 $t\in(\frac{\pi}{2},\pi)$. 麻烦!

[法二]. 直接验证 ① 中结果在 $x\in(-\infty,-a)$ 时也成立.

↑ 我写.

Campus

分部积分：$\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

例. $\int xe^x dx = \int x(e^x dx) = \int x\,d(e^x)$

$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$.

例. 求 $I = \int e^x \sin x\,dx$.

$I = \int \sin x\,de^x = e^x \sin x - \int e^x d\sin x = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$.

$= e^x \sin x - \int \cos x\,de^x = e^x \sin x - [e^x \cos x - \int e^x d\cos x]$

$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) - I$.

$\therefore I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$. ☆

例. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$. $a>0$.

$ys = \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx - \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int x\,d\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}} \cdot 2x\,dx - \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

$= x\sqrt{x^2+a^2} - (\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx) - \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

$= ys$.

$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{1}{2}\int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

$\therefore \Rightarrow ys = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{1}{2}\int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$.

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

每个实系数多项式可以分解为一次式和不可约二次式的乘积.

例. 求 $I=\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$.

设 $\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$

则 $\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}$ → 令 $x=0 \Rightarrow A=1$. $B=-1$.

令 $x=1 \Rightarrow C=1$.

$\therefore \frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$

$\therefore I=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx=\ln|x|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$.

求 $\int\frac{x\,dx}{x^2+x+1}$.

对分母求导: $(x^2+x+1)'=(2x+1)$

将 ys 改写成: $\int\frac{(x+\frac{1}{2})dx}{x^2+x+1}-\int\frac{\frac{1}{2}dx}{x^2+x+1}$

相同造, 便于写成对数关系.

$ys=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$

$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}$ ← $u=x+\frac{1}{2}$.

$=\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1|-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}}+C$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例1 $\int \frac{1}{x(1+x^8)}\,dx$

令 $u=x^8$. $du=8x^7$

$$原式=\int \frac{x^7\,dx}{x^8(1+x^8)}=\frac{1}{8}\int \frac{du}{u(u+1)}=\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^8}{x^8+1}\right|+C.$$

例1 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$.

[法一]. 课本P155. 代换, 令 $u=x-\frac{1}{x}$

[法二]. $x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$.

$$\therefore \frac{x^2+1}{x^4+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right)$$

$$\therefore 原式=\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}\,dx$$

代入计算即可

=……

例. $\int \frac{1}{\sin x\cos^3 x}\,dx$.

$\frac{1}{P(u,v)}$. $P(u,v)=uv^3$. 发现 $P(u,v)$ 关于 u 为奇函数. 可代换 $t=\cos x$.

其他同理, 代换 $\sin x$、$\tan x$ 均可.

$$原式=\int\frac{\frac{1}{\cos^4 x}}{\tan x}dx=\int\frac{\sec^2 x}{\tan x}d(\tan x)=\int\frac{u^2+1}{u}du=\int u\,du+\int\frac{1}{u}du$$

代换 $u=\tan x$

=!!!!!!

KOKUYO

No.

Date

例. $\int \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx$

$= \int \frac{\frac{1}{\cos^4 x}}{\frac{\tan^4 x+1}{\cos^4 x}}\,dx$ 令 $u=\tan x$. $du=\sec^2 x\,dx$.

$\sec^2 x=\tan^2 x+1$

$= \int \frac{u^2+1}{u^4+1}\,du$ ← 课本 P155. 例 3.13). 代换 $t=u-\frac{1}{u}$.

例. $\int \frac{1}{2\sin x+3\cos x}\,dx$. $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$. $\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$.

$= \frac{1}{\sqrt{13}}\int \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{13}}\sin x+\frac{3}{\sqrt{13}}\cos x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{13}}\int \frac{1}{\sin(x+\alpha)}\,d(x+\alpha)$.

↳ 代公式.

$= \frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\csc(x+\alpha)-\cot(x+\alpha)\right|+C$.

例. $\int \frac{1+x}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$. 常用方法. 对分母求导. 相连分子.

由 $(x-x^2)'=1-2x$.

$= \int \frac{x-\frac{1}{2}}{\sqrt{x-x^2}}\,dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$

$= -\frac{1}{2}\int \frac{(1-2x)\,dx}{\sqrt{x-x^2}} + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx$

令 $u=x-x^2$.

$-\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}}=\sqrt{u}+C$.

↓

课本 P144. 例 4. (3).

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. $\int e^{-|x|}dx$.

① 当 $x>0$. $ys=\int e^{-x}dx=-e^{-x}+C_1$.

② 当 $x<0$. $ys=\int e^{x}dx=e^{x}+C_2$.

∵ ys 在 $x=0$ 处连续

∴ $ys(0^+)=ys(0^-)=ys(0)$ 即 $-1+C_1=1+C_2$

$\Rightarrow C_2=C_1-2$. $ys(0)=-1+C_1$.

∴ $ys=\begin{cases}-e^{-x}+C_1 & x\geq 0\\ e^{x}+C_1-2 & x<0\end{cases}$ 还需再验证 ys 在 $x=0$ 处可导 且导数为1

例. $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$.

$ys=\int\frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int\tan\frac{x}{2}dx$.

↓

$\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}d\frac{x}{2}=d(\tan\frac{x}{2})$

∴ $ys=\int x\,d\tan\frac{x}{2}+\int\tan\frac{x}{2}dx=x\tan\frac{x}{2}+C$.

例. $\int\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}dx$.

加减, 使分子为分母的导数.

令 $x=\sin t$. $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$. $ys=\int\frac{\cos t\,dt}{\sin t+\cos t}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{\sin t+\cos t}{\sin t+\cos t}+\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)dt$

= ……

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

类题：$\int \frac{C\sin x + D\cos x}{A\sin x + B\cos x}\,dx$.

例. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2\cos x}\,dx$

令 $A(\sin x + 2\cos x) + B(\cos x - 2\sin x) = \sin x - \cos x$

$\Rightarrow A = -\frac{1}{5},\ B = -\frac{3}{5}$

为了构造出分子为分母的导数.

$\therefore ys = \int \left[\frac{-\frac{1}{5}(\sin x + 2\cos x)}{\sin x + 2\cos x} + \frac{-\frac{3}{5}(\cos x - 2\sin x)}{\sin x + 2\cos x}\right] dx$

$= -\frac{1}{5}x + \left(-\frac{3}{5}\right)\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}\ln|\sin x + 2\cos x| + C.$

例. $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\,dx$

观察，(猜测) $ys = \frac{f(x)}{x-\ln x} + C.$

$\frac{f'(x)(x-\ln x) - f(x)\cdot(1-\frac{1}{x})}{(x-\ln x)^2} = \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$

$f'(x) = 1.\ f(x) = x.$ 发现成立.

$\therefore ys = \frac{x}{x-\ln x} + C.$

例. $I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

分 $x>1.\ x<-1$ 两个区间！均代换 $x = \frac{1}{t}$.

$\begin{cases} x>1. & I = -\arcsin\frac{1}{x} + C. \ (1). \\ x<-1. & I = \arcsin\frac{1}{x} + C. \end{cases}$

验证：先求出式(1).

当 $x<-1$ 时，对式(1)求导，

发现为 $\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$. 与题目

不同的两个区间表达式不同.

$\therefore$ 综上，$I = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

#. 记 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 下界为 m，上界为 M.

由 $\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$

$\Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

则：$\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ 记为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的平均值.

由介值定理，$\exists \xi \in [a,b]$ 使 $f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ → 中值定理.

$\Rightarrow (b-a)f(\xi) = \int_a^b f(x)\,dx$.

不妨设 $g(x) \ge 0$. 则 $\int_a^b m g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le \int_a^b M g(x)\,dx$.

$\Rightarrow m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M$.

由介值定理，$\exists \xi \in [a,b]$ 使 $f(\xi) =$ ↗

#. 若 $a \le b$. 则 $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

#. $\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 \le \left[\int_a^b f^2(x)\,dx\right]\cdot\left[\int_a^b g^2(x)\,dx\right]$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

变上限积分 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$.

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$. $a\le x\le b$.

例. $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t^2\,dt = \sin x^2$.

例. $\frac{d}{dx}\int_x^2 \ln(1+t^2)\,dt = \frac{d}{dx}-\int_2^x \ln(1+t^2)\,dt = -\ln(1+x^2)$.

例. $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} e^{\cos t}\,dt$.

$y'=\frac{d}{dx}\int_0^{u(x)} e^{\cos t}\,dt$ $\quad u(x)=x^2$.

$=\phi(u)$. $\quad y=\phi(u)\cdot u=x^2$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{d\phi}{du}\cdot\frac{du}{dx}=e^{\cos u}\cdot 2x=2xe^{\cos x^2}$.

[注]: 先用 x^2 替代 t，再乘以 x^2 的导数即可.

$\frac{d}{dx}\left[\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt\right]=\frac{d}{dx}\left[\int_a^{u(x)} f(t)\,dt-\int_a^{v(x)} f(t)\,dt\right]$

$=f(u(x))\cdot u'(x)-f(v(x))\cdot v'(x)$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 40.

Date

例. 已知 $f(t)$ 连续. 求 $\frac{d}{dx}\int_0^x (x+t)f(t)\,dt$

x 视作常数.

$$ys = \frac{d}{dx}\left[x\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^x t f(t)\,dt\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[x\int_0^x f(t)\,dt\right] + \frac{d}{dx}\int_0^x t f(t)\,dt$$

$$= \int_0^x f(t)\,dt + x\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]' + xf(x)$$

$$= \int_0^x f(t)\,dt + xf(x) + xf(x) = \int_0^x f(t)\,dt + 2xf(x).$$

例. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

通常方法:

将 $[a,b]$ n等分.

$\lambda = \frac{b-a}{n}$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right).$$

区间 $[0,1]$ n等分. $f(x)=\frac{1}{1+x}$.

$$= \frac{1}{2}\left[f(\tfrac{1}{n})+f(\tfrac{2}{n})+\cdots+f(\tfrac{n}{n})\right].$$

$$\therefore ys = \int_0^1 f(x)\,dx = \ln 2.$$

例. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t\cos t\,dt$.

令 $u=\sin t$. $du=\cos t\,dt$. $t\in[0,\frac{\pi}{2}] \to \sin t\in[0,1]$

$$\therefore ys = \int_0^1 u^5\,du = \frac{1}{6}u^6\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

KOKUYO

No.

Date

例. $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$.

令 $x=3\sin t$. $dx=3\cos t\,dt$.

$ys=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\cos^2 t\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{9\pi}{4}$.

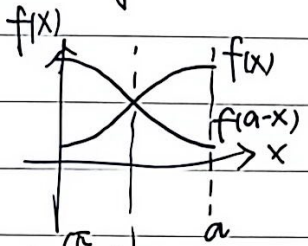
[注]. ys=四分之一圆的面积.

求 $\int_1^e \frac{du}{u(1+u)^2}$ → $\frac{1}{u(1+u)^2}=\frac{A}{u}+\frac{B}{1+u}+\frac{C}{(1+u)^2}$.

→ $\int_0^a f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^a [f(x)+f(a-x)]\,dx$.

$\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$. → $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$.

↑ f(x)与f(a-x)为关于 $x=\frac{a}{2}$ 对称的两函数



$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$.

⇔ 证 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$.

令 $x=t+\frac{\pi}{2}$. $t=x-\frac{\pi}{2}$.

左边 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f[\sin(t+\frac{\pi}{2})]\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt$ = 右边.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

$$\text{原式} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left[\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x} + \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\pi\sin x\,dx}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{-d\cos x}{1+\cos^2 x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

例. $\int_{-2}^{2} \frac{|x|}{2+x^2}\,dx$.

$$\text{原式} = 2\int_0^2 \frac{x\,dx}{2+x^2} = \ln(2+x^2)\Big|_0^2 = \ln 3.$$

Do

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\,dx$$

$g(x) = \frac{1}{1+e^x}$. → 发现 $g(x)+g(-x)=1$.

↳ P177. 例17.

Wallis Integrals:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n=2m \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n=2m+1. \end{cases}$$

递推即可.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date . .

$$\int_0^{\pi} \cos^4 x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx$$

$$\hookrightarrow = \int_0^{\pi} (1-\sin^2 x)^2\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)^2\,dx$$

例. $\int_0^1 (1-x^2)^m\,dx$

令 $x=\sin t \in [0,1]$, $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1} t\,dt = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}.$$

例. $\int_{5\pi}^{7\pi} \sin^6 2x\,dx$.

$\sin^6 2x$ 周期为 π, π 为一个周期. [P172. 例3]

$$\text{原式} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 2x\,dx = 2\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 2x\,dx \quad \text{令 } u=2x$$

$$= 2\cdot\int_0^{\pi} \sin^6 u\cdot du = 2\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 u\,du = 4\cdot\frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}.$$

例. $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\,dx$

$$\text{原式} = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\pi} (\sin x)^{\frac{3}{2}} |\cos x|\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{3}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x)^{\frac{3}{2}} (-\cos x)\,dx$$

$$= \int_0^1 u^{\frac{3}{2}}\,du - \int_1^0 u^{\frac{3}{2}}\,du = \frac{4}{5}.$$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 42.

Date

例. $f(t)$ 连续. $F(x)=\int_0^{2x} t f(x^2+t^2)\,dt$. 求 $F'(x)$.

令 $u=x^2+t^2$. 对 dx 处积分变量为 t. x 相当于常数!!

$du=2t\,dt$ 当 $t=0$. $u=x^2$. 当 $t=2x$. $u=5x^2$

$$F(x)=\frac{1}{2}\int_{x^2}^{5x^2} f(u)\,du$$

$$F'(x)=\frac{1}{2}\left[f(5x^2)\cdot 10x-f(x^2)\cdot 2x\right]$$
$$=5x f(5x^2)-x f(x^2).$$

例. 求 $f(x)=\int_0^1 |t(t-x)|\,dt$ $(0<x<1)$ 的表达式.

$$f(x)=\int_0^x t(x-t)\,dt+\int_x^1 t(t-x)\,dt$$
$$=x\int_0^x t\,dt-\int_0^x t^2\,dt+\int_x^1 t^2\,dt-x\int_x^1 t\,dt$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}.\quad (0<x<1).$$

例. 证明: $\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin t^2\,dt=\frac{(-1)^n}{c}$. $\sqrt{n\pi}\le c\le\sqrt{(n+1)\pi}$. $n\in N$

↑ 积分中值定理. $\int_a^b f(x)g(x)\,dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$.

要求: 在 $[a,b]$ $f(x)$ 连续, $g(x)$ 不变号. $\xi\in[a,b]$

左边 $=\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \left(\frac{1}{c}\right) t\sin t^2\,dt$ ($\frac{1}{c}$ 即 $f(t)$)

$=\frac{1}{c}\cdot\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} t\sin t^2\,dt$ ← $\sin t^2$ 在 $[\sqrt{n\pi},\sqrt{(n+1)\pi}]$ 上不变号.

↳ $-\frac{1}{2}\cos t^2\Big|_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}}=\cos n\pi$

$=\frac{(-1)^n}{c}$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

P172. 例3. 证 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$.

即证 $F(a) = \int_a^{a+T} f(x)dx - \int_0^T f(x)dx = 0$.

$F'(a) = \cdots\cdots = f(a+T) - f(a) = 0$

由 $F(0)=0$. $\Rightarrow F(a) \equiv 0$.

例. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$.

$\because \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}dx + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$. 当且仅当 $p>1$ 时积分收敛. $\because = \frac{1}{p-1}$.

当 $p>1$. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{(p-1)\cdot a^{p-1}}$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^q}$ 当 $q<1$. 收敛到 $\frac{1}{1-q}$.

$\int_a^b f(x)dx = F(b^-) - F(a^+)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. $\int_0^{+\infty} (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \arctan x \, dx$.

令 $x=\tan t$. 则 $dx=\sec^2 t \, dt$

当 $x: 0\to+\infty$. $t: 0\to\frac{\pi}{2}$.

$$ys=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot t \cdot \sec^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \, d\sin t$$

$$= t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = \frac{\pi}{2}-1.$$

例. $\int_0^1 \frac{3x^2-1}{(x^3-x)^{\frac{2}{3}}} dx$.

注意到. $(x^3-x)'=3x^2-1$.

令 $t=x^3-x$. 当 $x: 0\to1$. $t: 0\to0$

$$ys=\int_0^0 t^{-\frac{1}{3}} dt = 0.$$ 不太对…

先: $\int t^{-\frac{1}{3}} dt = \frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C$

$\therefore ys=\frac{3}{2}(x^3-x)^{\frac{2}{3}}\Big|_0^1 = 0.$

例. $\int_0^{+\infty} \frac{x\cos x-\sin x}{x^2} dx$.

注意到, $\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$$\therefore ys=\int_0^{+\infty} 1\cdot d\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\sin x}{x}\Big|_0^{+\infty} = -1.$$

$\because \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ (有界 $\div$ $+\infty$).

$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 比较判别法：

$f(x)$，$g(x)$ 为 $[a,+\infty)$ 上的非负连续函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

① 若 $0<l<+\infty$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同时收敛或发散.

② 若 $l=0$，则当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

例. 证明：$\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ 当且仅当 $s>0$ 时收敛.

可能的奇点：0，$+\infty$.

↑ $s<1$ 时.

$$\Gamma(s)=\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx+\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx.$$

① $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{s-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{1+s}}{e^x}=0$

由于 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛，故 $\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$ 收敛.

② $s\geq 1$，定积分，收敛.

$s<1$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^{s-1}e^{-x}}{\frac{1}{x^{1-s}}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{-x}=1$

$\therefore \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}dx$ 与 $\int_0^1\frac{1}{x^{1-s}}dx$ 同时收敛/发散

↑ $1-s<1$ 即 $s>0$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Euler 积分：$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx \quad (\alpha>0)$.

$$B(\alpha,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \quad (\alpha,\beta>0).$$

性质：递推：$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha) \longrightarrow \Gamma(n+1)=n!$

（不要求）转换：$B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

（不要求）余元：$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi} \quad (0<\alpha<1)$.

$\longrightarrow$ 取 $\alpha=\frac{1}{2}$. 有 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

证明：$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$. $s>0$.

$$\int_0^{+\infty} x^s e^{-x}dx=\int_0^{+\infty} x^s d(-e^{-x})=-x^s e^{-x}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}(-e^{-x})dx^s$$

$\int_0^{+\infty} x^s e^{-x}dx$ 即 $\Gamma(s+1)$

$$=\int_0^{+\infty} sx^{s-1}e^{-x}dx$$

$\int_0^{+\infty} sx^{s-1}e^{-x}dx$ 即 $s\Gamma(s)$

例. 求 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx$

$$Ys=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

☆课本P155. 例3.(3).

☆注即可证明.

注意，先确认 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}dx$，$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}dx$ 均收敛.

↳ $\frac{1}{1+x^4}<\frac{1}{x^4}$　　↑ $\frac{x^2}{1+x^4}<\frac{1}{x^2}$.

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0} x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \quad \text{洛必达}$$

$$= e^0 = 1.$$

例. $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

当 $x\in[0,1]$. $\frac{x^n}{1+x} \le x^n$.

$$0 \le \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \le \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \to 0$$

由夹逼定理, $\lim = 0$

例. 已知 $f(x)\ge 0$. 在 $[a,b]$ 连续. $\int_a^b f(x)\,dx = 1$. 已知 k 为任意常数,

证明: $\left[\int_a^b f(x)\cos kx\,dx\right]^2 + \left[\int_a^b f(x)\sin kx\,dx\right]^2 \le 1$.

$$\left[\int_a^b f(x)\cos kx\,dx\right]^2 = \left[\int_a^b \sqrt{f(x)}\sqrt{f(x)}\cos kx\,dx\right]^2$$

$$\le \int_a^b \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 dx \cdot \int_a^b \left(\sqrt{f(x)}\cos kx\right)^2 dx$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b f(x)\cos^2 kx\,dx$$

同理, $\left[\int_a^b f(x)\sin kx\,dx\right]^2 \le \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b f(x)\sin^2 kx\,dx$

两式相加: $\left[\int_a^b f(x)\cos kx\,dx\right]^2 + \left[\int_a^b f(x)\sin kx\,dx\right]^2 \le \int_a^b f(x)\cos^2 kx\,dx + \int_a^b f(x)\sin^2 kx\,dx$

$$= \int_a^b f(x)\,dx = 1.$$

□.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积.

例. $f(x)\in C[a,b]$ 且单增. 证明: $\int_a^b xf(x)dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

构造辅助函数 $F(x)=\int_a^x tf(t)dt - \frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)dt$

$F(a)=0$. 即证 $F(x)\geq 0=F(a)$.

$F'(x)=xf(x)-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt - \frac{(a+x)f(x)}{2}$

$=\frac{(x-a)f(x)}{2}-\frac{1}{2}\int_a^x f(t)dt = \frac{(x-a)f(x)}{2}-\frac{1}{2}(x-a)f(\xi)$

$a\leq\xi\leq x$. 中值定理.

$\because f(x)-f(\xi)\geq 0$.

$\therefore F'(x)\geq 0 \Rightarrow F(x)\geq F(a)=0$. 口.

设 $f(x)$ 连续. 证明: $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^x[f(t+h)-f(t)]dt=f(x)-f(a)$. $a<x$.

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$.

$\int_a^x f(t+h)dt = F(t+h)\Big|_a^x = F(x+h)-F(a+h)$.

$\int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a)$.

$\therefore$ 左边 $=\lim_{h\to 0}\frac{[F(x+h)-F(x)]-[F(a+h)-F(a)]}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$

$=F'(x)-F'(a)=f(x)-f(a)=$ 右边. 口.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的二阶导. 证明: $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3.$$

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$.

则 $\Leftrightarrow$ 证 $F(b)-F(a) = (b-a)F'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{F'''(\xi)}{24}(b-a)^3$.

在 $\frac{a+b}{2}$ 处 Taylor 展开.

$$F(b) = F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2} + \frac{1}{2!}F''\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(b-a)^2}{4}$$
$$+ \frac{1}{3!}F'''(\xi_1)\cdot\frac{(b-a)^3}{8} \quad ①$$

$$F(a) = F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{a-b}{2} + \frac{1}{2!}F''\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{(a-b)^2}{4}$$
$$+ \frac{1}{3!}F'''(\xi_2)\frac{(a-b)^3}{8}. \quad ②$$

① - ②: $F(b)-F(a) = (b-a)F'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{48}\left[F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)\right]$

$\because \exists F'''(\xi) = \frac{1}{2}\left[F'''(\xi_1)+F'''(\xi_2)\right]$.

$\xi \in (\xi_2, \xi_1) \subset (a,b)$ 介值定理.

$\therefore$ 得证.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求悬链线 $y = a\cosh\frac{x}{a}$ 在 $[-c, c]$ 上的长度.

$y' = a\cdot\frac{1}{a}\sinh\frac{x}{a} = \sinh\frac{x}{a}$

$s = \int_{-c}^{c}\sqrt{1+y'^2}\,dx = \int_{-c}^{c}\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}\,dx = \int_{-c}^{c}\cosh\frac{x}{a}\,dx$

$= a\sinh\frac{x}{a}\Big|_{-c}^{c} = 2a\sinh\frac{c}{a}.$

弧长: $s = \int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx.$

若 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t). \end{cases}$ 则 $s = \int_\alpha^\beta\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt.$

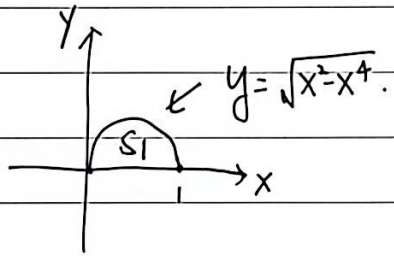
$\alpha \le t \le \beta.$

若 $r = r(\theta)$ 则 $s = \int_\alpha^\beta\sqrt{r'(\theta)^2+r^2(\theta)}\,d\theta.$

$\alpha \le \theta \le \beta$

例. 求 $y^2 = x^2 - x^4$ 所围图形的面积.

对称. 只考虑 I 象限. $\rightarrow x \in [0, 1]$.



$\therefore S = 4S_1 = 4\int_0^1\sqrt{x^2-x^4}\,dx$

三角换元.

$= \cdots = \frac{4}{3}.$

KOKUYO

No.

Date

例. $f(x)\in C[a,b]$. $\int_a^b f(x)=0$. 证 $\exists \xi\in(a,b)$ 使 $\int_a^\xi f(x)dx=f(\xi)$.

设 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$.

$\Leftrightarrow$ 证 $F(\xi)-F(a)=F'(\xi)$

令 $G(x)=F(x)-F(a)$. $G(a)=0$. $\Leftrightarrow$ 证 $G(\xi)=G'(\xi)$.

$\Leftrightarrow$ 证 $G(\xi)-G'(\xi)=0$.

∴ 构造 $H(x)=e^{-x}\cdot G(x)$. Rolle 定理.

$\rightarrow f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$.

构造 $F(x)=e^{\int g(x)dx}\cdot f(x)$. ☆.

例. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续的二阶导数. $f(0)=0$. $f(1)=0$. $|f''(x)|\le M$. → 若区间改为 $[a,b]$. 则取辅助函数 $(x-a)(x-b)$.

证明: $\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\le\frac{M}{12}$.

由分部积分: $\int_0^1(x-x^2)f''(x)dx=\cdots=-2\int_0^1 f(x)dx$.

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|=\frac{1}{2}\left|\int_0^1(x-x^2)f''(x)dx\right|\le\frac{1}{2}\int_0^1|(x-x^2)f''(x)|dx$$

$$\le\frac{M}{2}\int_0^1(x-x^2)dx=\frac{M}{12}.$$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $\int_0^{x^3}\ln(1+t^2)dt$ 的主部.

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^3}\ln(1+t^2)dt}{x^k}\overset{洛}{=}\lim_{x\to0}\frac{3x^2\ln(1+x^6)}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to0}\frac{3x^5}{kx^{k-1}}=C.$$

$\therefore k=6,\ C=\frac{1}{3}$. 主部为 $\frac{1}{3}x^6$.

例. 已知 f 为连续函数, 求 $L=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x[te^t\int_{t^2}^0 f(u)du]dt}{x^3e^x}$.

$g(t)=te^t\int_{t^2}^0 f(u)du$. 则 $L=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x g(t)dt}{x^3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{e^x}$

$\therefore$ 由洛必达: $L=\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{3x^2}\cdot1=\lim_{x\to0}\frac{xe^x\int_{x^2}^0 f(u)du}{3x^2}=\cdots=0.$

(再洛)

$$\lim_{x\to0}\frac{-2xf(x^2)}{3}$$

$f(x^2)$ 是一个确定的数 $f(0)$.

例. $f(x)$ 连续且恒正.

证明: $\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\geq(b-a)^2$.

方边 $=\int_a^b[\sqrt{f(x)}]^2dx\cdot\int_a^b[\frac{1}{\sqrt{f(x)}}]^2dx$

$\geq\left[\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right]^2=(b-a)^2$ 柯西

□.

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+e^{\sin^2 x}}\,dx$.

令 $u=\sin x$　　令 $v=u^2$

$$原式=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos x}{1+e^{\sin^2 x}}\,dx = \int_0^1 \frac{2u\,du}{1+e^{u^2}} = \int_0^1 \frac{dv}{1+e^v}$$

$$= \int_0^1 \frac{e^v dv}{e^v(1+e^v)} = \int_1^e \frac{dt}{t(1+t)} = \int_1^e \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt = \cdots\cdots.$$

令 $t=e^v$

求 $xy'+y=y^2$ 满足 $y(1)=\frac{1}{2}$ 的特解

$$x\cdot\frac{dy}{dx}+y=y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2-y}=\frac{dx}{x} \quad (*)$$

∵ 当 $x=1$. $y=\frac{1}{2}$

∴ 只关心在 $x=1$ 附近情况，则不再考虑绝对值.

$(*)$ 积分得：$\ln\frac{1-y}{y}=\ln x+C_1$.

$$\Rightarrow \frac{1-y}{y}=Cx \quad 再代入 x=1,\ y=\frac{1}{2} \Rightarrow C=1.$$

$$\therefore y=\frac{1}{1+x}$$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $x+yy'=(x^2+y^2+1)\tan x$ 的通解.

令 $u=x^2+y^2+1$ 注意到, $u'=2x+2yy'=2(x+yy')$

则 $\frac{1}{2}u'=u\cdot\tan x$.

即 $\frac{1}{2}\frac{du}{dx}=u\cdot\tan x \Rightarrow \frac{du}{dx}=2u\tan x$

$\therefore \frac{du}{u}=2\tan x\,dx$.

积分, 得: $\ln|u|=-2\ln|\cos x|+C$.

即 $\ln(x^2+y^2+1)+\ln(\cos^2 x)=C$

$\therefore (x^2+y^2+1)\cdot\cos^2 x=C_1$.

例. 求 $(y')^2=y$ 的通解.

$\Rightarrow y'=\pm\sqrt{y}$ 即 $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{y}$

$\therefore \frac{dy}{\sqrt{y}}=\pm dx \Rightarrow$ 积分: $2\sqrt{y}=\pm x+C$.

$\therefore y=\frac{(x+C)^2}{4}$ 注意到, $y=0$ 为原方程的奇解.

例. 求 $y'=\frac{x^2+\cos x}{y+e^y}$ 的通解.

$(y+e^y)\,dy=(x^2+\cos x)\,dx$.

$\therefore \frac{1}{2}y^2+e^y=\frac{1}{3}x^3+\sin x+C$

可得隐式通解.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 求 $x^2y\,dx-(x^3+y^3)\,dy=0$ 的通解.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2y}{x^3+y^3}=\frac{\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^3}$$

↑ 齐次. 右端上下同时÷ x^3.

令 $u=\frac{y}{x}$. $\Rightarrow y=ux$. $\frac{dy}{dx}=u+xu'$.

$$\therefore u+xu'=\frac{u}{1+u^3} \Rightarrow x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1+u^3}-u=\frac{-u^4}{1+u^3}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{-u^4}\cdot(1+u^3)=\frac{dx}{x}$$

两边积分: $-\int(\frac{1}{u}+\frac{1}{u^4})\,du=\int\frac{1}{x}\,dx$

$\Rightarrow \frac{1}{3}u^{-3}-\ln|u|=\ln|x|+C_1$ → 直接写成 $\ln C_2$.

$\therefore \ln|ux|=\frac{1}{3}u^{-3}+\ln C_2$

$\Rightarrow y=\pm e^{\frac{1}{3}u^{-3}+\ln C_2}$ 即: $y=C\cdot e^{\frac{1}{3}\cdot(\frac{x}{y})^3}$

对于一阶线性微分方程 $y'+a(x)y=b(x)$.

设 $A'(x)=a(x)$. → $e^{A(x)}y'+e^{A(x)}a(x)y=e^{A(x)}b(x)$.

积分: $e^{A(x)}y=\int e^{A(x)}b(x)\,dx$.

$\Rightarrow$ 通解 $\boxed{y=e^{-A(x)}\left[\int e^{A(x)}b(x)\,dx+C\right]}$.

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

方程 $y'+a(x)y=0$ 通解为 $y=C\cdot e^{-A(x)}$

对一阶线性微分方程 $y'+a(x)y=b(x)$，令 $y=c(x)\cdot e^{-A(x)}$，代入原方程 $\Rightarrow$ 通解：$y=e^{-A(x)}\cdot\left[\int e^{A(x)}b(x)\,dx+C\right]$

Bernoulli 方程：$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$，$n\neq 0,1$.

即：$y'=a(x)y+b(x)y^n$.

代换 $u=y^{1-n}$，化为一阶线性微分方程求解.

$u'=(1-n)y^{-n}\cdot y'$

step 1. 去掉右边的 y.

观察左边，凑得代换 $u=y^{1-n}$

$\therefore y'+P(x)y=Q(x)y^n \Rightarrow y^{-n}y'+P(x)y^{1-n}=Q(x)$

$\Rightarrow \frac{u'}{1-n}+P(x)u=Q(x)$.

例. 求 $y'=\frac{y}{2x}-\frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x}$ 的通解.

令 $u=\frac{y^2}{x}$，$u'=\frac{2yy'x-y^2}{x^2}$

原方程 $\Rightarrow 2xy\cdot y'=y^2-x\tan\frac{y^2}{x}$

即 $\frac{2xyy'-y^2}{x^2}=\frac{-x\tan\frac{y^2}{x}}{x^2}$

$\therefore u'=-\frac{1}{x}\tan u \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{-\tan u}{x}$

$\Rightarrow \frac{du}{\tan u}=-\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|\sin u|=-\ln|x|+C_1$

$\therefore x\sin u=C \Rightarrow x\sin\frac{y^2}{x}=C$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 求 $xy' - y\ln y = x^2 y$ 的通解.

令 $u = \ln y$. $u' = \frac{1}{y} \cdot y'$.

原方程 $\Rightarrow \frac{xy'}{y} - \ln y = x^2$

$\therefore xu' - u = x^2$

$\Rightarrow u' - \frac{1}{x}u = x$. 代公式 $u = e^{-A(x)} \cdot [\int e^{A(x)} b(x)\,dx + C]$

其中 $a(x) = -\frac{1}{x} \to A(x) = -\ln x$. $b(x) = x$.

$\therefore u = e^{\ln x}[\int e^{-\ln x} \cdot x\,dx + C] = x \cdot [\int 1 \cdot dx + C]$

$= x(x+C) \Rightarrow y = e^{x(x+C)}$

高阶方程: ① $y^{(n)} = f(x)$. → 多次积分即可.

e.g. $y'' = 6x + e^x$.

则: $y' = \int (6x + e^x)\,dx = 3x^2 + e^x + C_1$

$y = x^3 + e^x + C_1 x + C_2$.

[n阶则含n个常数].

② 缺 y: $y'' = f(x, y')$. → 代换 $p = y'$ 即可.

$\Rightarrow p' = f(x, p)$. 降为一阶.

e.g. $xy'' + 2y' = x^2$ 初值 $y(2) = -1$. $y'(2) = 2$.

$\Rightarrow y'' + 2y' \cdot \frac{1}{x} = x$. 令 $y' = p(x)$. 则 $p' + \frac{2}{x}p = x$.

解得 $p = e^{-\int 2/x\,dx}[\int e^{\int 2/x\,dx} \cdot x\,dx + C] = \frac{1}{4}x^2 + \frac{C}{x^2}$.

代入 $p(2) = y'(2) = 2 \Rightarrow C = 4$. $\therefore p = \frac{1}{4}x^2 + \frac{4}{x^2} = y'$.

再积分. 得 $y = \frac{1}{12}x^3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{5}$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

☆ 型求 x：$y''=f(y,y')$ → 令 $y'=p(y)$.

则有：$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{dp(y)}{dx}=\frac{dp(y)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p'(y)\cdot\frac{dp(y)}{dy}$

$(p'(y)=p'\cdot y')$.

$\therefore y''=\frac{dp}{dy}\cdot p$

e.g. $yy''=(y')^2$

令 $y'=p(y)$. 则 $y\cdot p\frac{dp}{dy}=p^2 \Rightarrow y\cdot\frac{dp}{dy}=p$

$\therefore \frac{dp}{p}=\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln p=\ln y+C_1$

$\therefore p=C_2y$ ⟶ 还有 $p=0$. 或 $y=0$ 也是解.

即 $\frac{dy}{dx}=C_2y \Rightarrow y=C_3e^{C_2x}$

例. 求解 $y''+(y')^2=1$. $y(0)=1$. $y'(0)=0$.

设 $y'=p(x)$. 则 $y''=p'$.

$\therefore \frac{dp}{dx}=1-p^2 \Rightarrow \frac{dp}{1-p^2}=dx$

$\therefore \frac{1}{2}\ln\left|\frac{p+1}{p-1}\right|=x+C_1 \Rightarrow \left|\frac{p+1}{p-1}\right|=e^{2x+2C_1}$ 代入 $y'(0)=0$ 得 $C_1=0$

$\therefore \left|\frac{p+1}{p-1}\right|=e^{2x}$ 当 x 在 0 附近，$\left|\frac{p+1}{p-1}\right|=\frac{p+1}{1-p}=e^{2x}$

↳ p 在 0 附近 $(y'(0)=0)$.

解得 $y'=p=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

$\therefore y=\int\frac{e^x(e^{2x}-1)}{e^x(e^{2x}+1)}dx=\int\frac{t^2-1}{t(t^2+1)}dt=\ln(1+e^{2x})-x+C$.

令 $t=e^x$

代入 $y(0)=1 \Rightarrow C=1-\ln 2$.

$\therefore y=\ln(1+e^{2x})-x+1-\ln 2$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

齐次线性微分方程的解集合对加法和数乘封闭. 非齐次的则不封闭!

线性微分方程解的结构: [叠加原理]

① 若 $Lu=0$, $Lv=0$. 则 $L(u+v)=0$. $L(ku)=0$

② 若 y_i^* 分别是 $Ly=f_i(x)$, $i=1,2,\cdots,m$ 的解, 则 $Ly=k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_mf_m(x)$ 的一个解为 $y^*=k_1y_1^*+k_2y_2^*+\cdots+k_my_m^*$.

③ 若 $Ly=f(x)$, $Ly^*=f(x)$. 则 $L(y-y^*)=0$.

让 $D=\frac{d}{dx}$, $D^i=\frac{d^i}{dx^i}$

则有 $y'=Dy$. $y^{(n)}=D^ny$.

让 $L=D^n+a_1(x)D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x)D+a_n(x)$

则 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=Ly$

例. 证 $D^2(2u+3v)=2D^2u+3D^2v$.

$\Leftrightarrow (2u+3v)''=2u''+3v''$.

$$L(au+bv)=aLu+bLv.$$

函数组的线性相关性:

某区间上一组函数 $y_1,y_2,\cdots,y_n$. 若存在一组不全为0的常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, 使得: $\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\cdots+\lambda_ny_n\equiv 0$.

则称函数组 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 线性相关.

例. $1, x, x^2$ 线性无关.

设 $\lambda_1\cdot 1+\lambda_2\cdot x+\lambda_3\cdot x^2\equiv 0$.

取 $x=1,2,3$ 得 $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3=0\\ \lambda_1+3\lambda_2+9\lambda_3=0\end{cases}$ 仅有唯一解 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

得证.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为 n 阶齐次线性微分方程 $Ly=0$ 的一组线性无关的解. y^* 是 $Ly=f(x)$ 的解. 则:

① $Ly=0$ 的通解 $y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$.

② $Ly=f(x)$ 的通解 $y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n+y^*$.

对 $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$. (**)

step 1: 求 $y''+a(x)y'+b(x)y=0$ (*) 的解:

① 求出一个解 y_1.

② 令 $y_2=C(x)y_1$ 代入 (*). 求出 y_2.

③ 得 (*) 式通解 $Y=C_1y_1+C_2y_2$.

step 2: 令 (**) 的解为 $y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2=v_1y_1+v_2y_2$.

规定 $v_1'y_1+v_2'y_2=0$.

联立 $\begin{cases} v_1'y_1+v_2'y_2=0 \\ v_1'y_1'+v_2'y_2'=f(x) \end{cases}$ $\Rightarrow$ 解出 v_1', v_2'. 再积分, 得 v_1, v_2.

$\therefore$ 得 (**) 的一个特解 $y=v_1y_1+v_2y_2$.

二阶常系数线性微分方程. $y''+ay'+by=0$ (*).

令 $y=e^{rx}$. 代入. 得 $(r^2+ar+b)e^{rx}=0$.

$\therefore$ $\boxed{r^2+ar+b=0.}$ 特征方程.

① $\Delta>0$. 有 r_1, r_2. 则 (*) 的通解 $y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$.

② $\Delta=0$. 有 $r_1=r_2=r$.

则 $r^2-2\lambda r+\lambda^2=0$. $\rightarrow \lambda^2-2r\lambda+r^2=0$.

$\Rightarrow$ 原方程 $y''-2ry'+r^2y=0$. $\Rightarrow y_1=e^{rx}$

令 $y_2=C(x)\cdot e^{rx}$. 代入 (*) 得 $C(x)=x$ $\Rightarrow y_2=xe^{rx}$

$\therefore$ (*) 的通解 $y=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx}$.

③ $\Delta<0$. 有一对共轭复根. $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$.

其中 $\alpha=\frac{-a}{2}$. $\beta=\frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$

有 $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$. $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ 且满足 (*) 式.

$\therefore$ 通解 $y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$

KOKUYO
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date . .

例. 求 $y''+y'=0$ 的通解.

特征方程: $r^2+r=0$. $\Rightarrow \Delta=1-0=1$.

$r_1=0$. $r_2=-1$.

∴ 通解 $y=C_1+C_2e^{-x}$. $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

例. 求 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

$r^2+2r+5=0$ (*) $\Rightarrow \Delta=4-20=-16$ (*)配方: $(r+1)^2+4=0$.

∴ $r_{1,2}=-1\pm 2i$. $\alpha=-1$. $\beta=2$.

∴ 通解 $y=C_1e^{-x}\cos 2x+C_2e^{-x}\sin 2x$. $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

例. 求 $4s''+4s'+s=0$ 满足初始条件 $s(0)=2$. $s'(0)=-2$ 的解 $s(t)$.

特征方程: $4r^2+4r+1=0$ $\Rightarrow \Delta=16-16=0$.

$r_1=r_2=-\frac{1}{2}$.

∴ 有两个线性无关解: $s_1(t)=e^{-\frac{1}{2}t}$. $s_2(t)=t\cdot e^{-\frac{1}{2}t}$.

∴ 通解 $s(t)=C_1\cdot e^{-\frac{1}{2}t}+C_2t\cdot e^{-\frac{1}{2}t}$.

代入 $s(0)=2$. $s'(0)=-2$. $\Rightarrow C_1=2$ $C_2=-1$.

∴ 解 $s(t)=2e^{-\frac{1}{2}t}-te^{-\frac{1}{2}t}$.

若为非齐次: $y''+ay'+by=f(x)$.

step 1. 求 $y''+ay'+by=0$ 的通解 Y.

step 2. 求满足 $y''+ay'+by=f(x)$ 的一个解 y^*. 称为特解.

step 3. 得非齐次… 通解 $y=Y+y^*$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

关于 step 2. 求特解 y^*:

$f(x)$.	y^* 的待定形式.
$e^{\alpha x}\cdot P_m(x)$.	若 α 不是特征根, $y^*=e^{\alpha x}\cdot R_m(x)$. 若 α 是 k 重特征根, $y^*=x^k\cdot e^{\alpha x}\cdot R_m(x)$.
$e^{\alpha x}\cdot[P_m(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$	若 $\alpha\pm\beta i$ 不是特征根, $y^*=e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x+S_m(x)\sin\beta x]$. 若 $\alpha\pm\beta i$ 是 k 重特征根, $y^*=x^k\cdot e^{\alpha x}[R_m(x)\cos\beta x+S_m(x)\sin\beta x]$.

以上 $P_m(x)$. $Q_m(x)$. $R_m(x)$. $S_m(x)$ 均为 $\le m$ 次多项式.

人话:

类1: $f(x)=2x^2+x+1$ → 令 $y^*=Ax^2+Bx+C$.

类2: $f(x)=e^{ax}$ (若 e^{ax} 不是初次解 Y 的一部分 → 令 $y^*=A\cdot e^{ax}$.
| 若 ..... 是 ... → 令 $y^*=Ax\cdot e^{ax}$.

类3: $f(x)$ 为 $\cos bx$ 或 $\sin bx$ → 令 $y^*=A\cos bx+B\sin bx$
(若 Y 包含 $\cos bx$, $\sin bx$, 则 y^* 需再乘一个 x).

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

类4: $f(x)=e^{ax}\cdot(\text{三角}) \longrightarrow$ 令 $y^*=e^{ax}(A\cos bx+B\sin bx)$

(若 Y 已含该特解，则 y^* 再乘一个 x)

写出 y^* 待定形式后，再代回原方程，求得 $A, B, \cdots$

例. 求 $y''+3y'+2y=2x^2+x+1$ 的通解

step 1. 求 $y''+3y'+2y=0$ 的通解.

特征方程 $r^2+3r+2=0 \Rightarrow \Delta=9-8=1>0$

有 $r_1=-1,\ r_2=-2$.

$\therefore Y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

step 2. 求特解.

设 $y^*=Ax^2+Bx+C$.

代入原方程: $(Ax^2+Bx+C)''+3(Ax^2+Bx+C)'+2(Ax^2+Bx+C)$

$=2A+3(2Ax+B)+2Ax^2+2Bx+2C$

$=2Ax^2+(6A+2B)x+2A+3B+2C=2x^2+x+1$

$$\therefore \begin{cases} 2A=2 \\ 6A+2B=1 \\ 2A+3B+2C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-\frac{5}{2} \\ C=\frac{13}{4} \end{cases}$$

$\therefore y^*=x^2-\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}$.

$\therefore$ 综上，通解 $y=Y+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+x^2-\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $y''+2y'-3y=2e^x$ 的通解.

step 1. $\because r^2+2r-3r=0 \Rightarrow \Delta=4+12=16>0$.

$\therefore r_1=1,\ r_2=-3$.

$\therefore Y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$

step 2. 设特解 $y^*=A\cdot e^x$.

代回原方程: $A\cdot e^x+2Ae^x-3A\cdot e^x=0$??

非齐次项 $2e^x$ 中, $\alpha=1$.

↑ $e^{\alpha x}$.

或者说, e^x 是通解 Y 的一部分.

1是特征根之一. 故在设 y^* 要再乘一个 x.

设特解 $y^*=A\cdot xe^x$.

代回原方程: $A(2e^x+xe^x)+2A\cdot(e^x+xe^x)-3A\cdot xe^x$

$=4Ae^x=2e^x \Rightarrow A=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 特解 $y^*=\frac{1}{2}xe^x$.

$\therefore$ 综上, $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}+\frac{1}{2}xe^x$.

例. 求 $y''+y'-2y=2\cos 2x$ 的通解.

step 1. $r^2+r-2r=0 \Rightarrow \Delta=1+8=9>0$

$\therefore r_1=1,\ r_2=-2. \Rightarrow Y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$.

step 2. 设特解 $y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$.

代回原方程: $-4A\cos 2x-4B\sin 2x-2A\sin 2x+2B\cos 2x-2A\cos 2x-2B\sin 2x$

$=-6A\cos 2x-6B\sin 2x+2B\cos 2x-2A\sin 2x=2\cos 2x$

$\therefore \begin{cases}-6A+2B=2\\-6B-2A=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=-\frac{3}{10}\\B=\frac{1}{10}\end{cases}$ $\therefore y^*=-\frac{3}{10}\cos 2x+\frac{1}{10}\sin 2x$

$\therefore$ 综上, $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}-\frac{3}{10}\cos 2x+\frac{1}{10}\sin 2x$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 求 $y'''+y'=\sin x$ 的通解.

step 1. $r^3+r=0 \Rightarrow r_1=0,\ r_{2,3}=\pm i$.

对 $r_1=0$, $C_1e^{r_1x}=C_1$.

对 $r_2=-i$, $r_3=i$, $\alpha=0,\ \beta=1$. 有 $C_2e^{\alpha x}\cos\beta x+C_3e^{\alpha x}\sin\beta x$

$=C_2\cos x+C_3\sin x$.

$\therefore Y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x$. ← Y中已含 $\cos x, \sin x$. 故 y^* 要再乘一个 x.

step 2. 设 $y^*=x(A\cos x+B\sin x)$

代回: $(-2A\sin x-Ax\cos x+2B\cos x-Bx\sin x)'+A\cos x-Ax\sin x+B\sin x+Bx\cos x$

$=-2A\cos x-A\cos x+Ax\sin x-2B\sin x-B\sin x-Bx\cos x+A\cos x$

$-Ax\sin x+B\sin x+Bx\cos x$

$=-2A\cos x-2B\sin x=\sin x \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=-\frac{1}{2}. \end{cases}$

$\therefore y^*=-\frac{1}{2}x\sin x$

$\therefore$ 综上, $y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x-\frac{1}{2}x\sin x$.

[总结]: 若方程 $Ly=0$ 的特征方程中出现 r 的 k 重根. 如: $(r-3)^k=0$.

则通解 Y 中将包含 C_1e^{rx}, C_2xe^{rx}, $C_3x^2e^{rx}$, ..., $C_kx^{k-1}e^{rx}$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求 $y''-y'=x$ 的通解.

step 1. $r^2-r=0$. $\Rightarrow r_1=0$. $r_2=1$.

$\therefore Y=C_1+C_2e^x$.

step 2. 令 $y^*=Ax+B$.

代回: $0-A=x$. ??

常数项B已出现在Y中($C_1\to$常数).

故 y^* 应再乘一个 x.

令 $y^*=x(Ax+B)$

代回: $2A-2Ax-B=x \Rightarrow \begin{cases} -2A=1 \\ 2A-B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=-1 \end{cases}$

$\therefore y^*=-\frac{1}{2}x^2-x$.

$\therefore$ 综上, $y=C_1+C_2e^x-\frac{1}{2}x^2-x$.

例. 求 $y''+9y=x+\sin 3x$ 的通解.

step 1. $r^2+9=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm 3i$. 即 $\alpha=0$. $\beta=3$.

$\therefore Y=C_1\cdot\cos 3x+C_2\cdot\sin 3x$.

step 2. 令 $y^*=x(Ax+B\sin 3x+C\cos 3x)$

若 $f(x)$ 含三角函数, 则在设 y^* 时需同时加入 sin 和 cos.

代回: $2A+3B\cos 3x+3B\cos 3x-9Bx\sin 3x$

$-3C\sin 3x-3C\sin 3x-9Cx\cos 3x+9(2Ax+B\sin 3x+3Bx\cos 3x$

$+Cx\cos 3x-3Cx\sin 3x)$ → 错3, 应代 y 即非 y'.

$=2A+18Ax+(6B+9C)\cos 3x+(9B-6C)\sin 3x-(9B+27C)x\sin 3x$

$+(27B-9C)x\cos 3x=x+\sin 3x$

$\Rightarrow$

对于 $x+\sin 3x$. 分别设特解 y_1^*, y_2^*. 叠加原理 3. 求出后再相加得 y^*.

设 $y_1^*=Ax+B$. 代回: $0+9(Ax+B)=x \Rightarrow A=\frac{1}{9}$. $B=0$.

$\therefore y_1^*=\frac{1}{9}x$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

设 $y_2^* = x(A\cos 3x + B\sin 3x)$.

代回：$-6A\sin 3x - 9Ax\cos 3x + 6B\cos 3x - 9Bx\sin 3x + 9Ax\cos 3x + 9Bx\sin 3x$

$= -6A\sin 3x + 6B\cos 3x = \sin 3x \Rightarrow A = -\frac{1}{6},\ B = 0.$

$\therefore y_2^* = -\frac{1}{6}x\cos 3x.$

$\Rightarrow y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{1}{9}x - \frac{1}{6}x\cos 3x$

$\therefore$ 综上，$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{9}x - \frac{1}{6}x\cos 3x.$

欧拉方程：$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$.

令 $x = e^t$，$t = \ln x$，记 $D = \frac{d}{dx}$.

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}Dy \Rightarrow xy' = Dy.$

同理 $\Rightarrow x^2 y'' = D(D-1)y.$

$x^3 y''' = D(D-1)(D-2)y.$

⋮ ⋮

例. 求 $x^2y'' + xy' - y = 3x^2$ 通解. 令 $x = e^t$，$D = \frac{d}{dx}$

原方程 $\Rightarrow D(D-1)y + Dy - y = 3e^{2t}$

$\therefore (D^2-1)y = 3e^{2t} \Leftrightarrow y'' - y = 3e^{2t}$

特征方程 $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$

$\therefore Y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$

令 $y^* = Ae^{2t}$ 代回 $\Rightarrow A = 1$ $\therefore y^* = e^{2t}$

$\therefore$ 综上，$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + e^{2t} = C_1 x + \frac{C_2}{x} + x^2.$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 求解 $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$

记 $D = \frac{d}{dt}$. 则 $\Rightarrow \begin{cases} (D-3)x + 2y = 0 \\ 2x - (D+1)y = 0. \end{cases}$

消元, 得 $(D^2 - 2D + 1)x = 0$.

特征方程 $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$.

$\therefore x(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$.

$\therefore y(t) = C_1 e^t - \frac{C_2}{2} e^t + C_2 t e^t$.

例. 求连续函数 $f(x)$, 满足 $f(x) = e^x - \int_0^x (x-t) f(t)\, dt$.

$f(x) = e^x - \int_0^x x f(t)\, dt + \int_0^x t f(t)\, dt$

$= e^x - x \int_0^x f(t)\, dt + \int_0^x t f(t)\, dt$.

两边求导: $f'(x) = e^x - \int_0^x f(t)\, dt - x f(x) + x f(x)$.

$\therefore f'(x) = e^x - \int_0^x f(t)\, dt$

再导: $f''(x) = e^x - f(x)$ 即 $y'' + y = e^x$.

特征方程 $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$. 即 $\alpha = 0$. $\beta = 1$.

$\therefore Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

令 $y^* = Ae^x$ 代回 $\Rightarrow A = \frac{1}{2}$. $\therefore y^* = \frac{1}{2} e^x$.

$\therefore f(x) = y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x$.

代入 $f(0) = 1$. $f'(0) = 1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$. $C_2 = \frac{1}{2}$.

$\therefore f(x) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} e^x$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 求解 $y^3y''+1=0$. $y(1)=1$. $y'(1)=0$.

设 $y'=p(y)$. 则 $y''=p\frac{dp}{dy}$

$\therefore y^3\cdot p\cdot\frac{dp}{dy}=-1 \Rightarrow pdp=-\frac{1}{y^3}dy$

$\therefore \frac{1}{2}p^2=\frac{1}{2}y^{-2}+C_1 \Rightarrow p^2=y^{-2}+C_2$.

代入 $x=1$, $y=1$, $p=0$ $\Rightarrow C_2=-1$

$\therefore p^2=y^{-2}-1$

$\therefore p=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$. 即 $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$

$\Rightarrow \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}}=\pm dx \Rightarrow \sqrt{1-y^2}=\pm x+C_3$

$\therefore 1-y^2=(x+C_4)^2$. 代入 $y(1)=1 \Rightarrow C_4=-1$.

$\therefore (x-1)^2+y^2=1$.

例. 求通解为 $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=1$ 的微分方程.

求导两次: $x-C_1+(y-C_2)y'=0$.

$1+y'^2+(y-C_2)y''=0$.

$\because y-C_2=-\frac{1+y'^2}{y''}$ $x-C_1=\frac{y'(1+y')^2}{y''}$

代回原方程, 消去 C_1, C_2

$\therefore (y'')^2=(1+y'^2)^3$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求解 $\frac{y-xy'}{y^2}=\left(\frac{y}{x}\right)^{99}$

注意到 $\left(\frac{x}{y}\right)'=\frac{y-xy'}{y^2}$ ∴令 $u=\frac{x}{y}$.

$\Rightarrow u'=\left(\frac{1}{u}\right)^{99}$ 即 $\frac{du}{dx}=\frac{1}{u^{99}}$

$\therefore u^{99}du=dx \Rightarrow \frac{1}{100}u^{100}=x+C$ 即 $\frac{1}{100}\left(\frac{x}{y}\right)^{100}=x+C$.

$\therefore x^{100}=y^{100}(100x+C_1)$.

例. 求解 $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x-5}{2x-y+4}$.

令 $x=X+\alpha$. $y=Y+\beta$. $\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dX}$.

↑平移变换

$\text{右边}=\frac{2Y+2\beta-X-\alpha-5}{2X+2\alpha-Y-\beta+4}$ 为了消去常数：令 $\begin{cases}2\beta-\alpha-5=0\\2\alpha-\beta+4=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\\beta=2\end{cases}$ $\therefore \frac{dY}{dX}=\frac{2Y-X}{2X-Y}$ (齐次) $=\frac{2\frac{Y}{X}-1}{2-\frac{Y}{X}}$.

令 $Y=uX \Rightarrow u+X\frac{du}{dX}=\frac{2u-1}{2-u}$

解得 $y-x-3=C(x+y-1)^3$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

已知二阶线性非齐次方程的三个特解 $y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=x^2$.
求方程通解.

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x).$$

由 $y_2-y_1=x-1$.
$y_3-y_1=x^2-1$. $\longrightarrow$ 两个线性无关的特解之差为齐次的解.

$\therefore Y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)$.

$\therefore y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1$.

例: 证明 $f(x)=x^2\cdot D(x)$ 仅在 $x=0$ 连续且可导.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in\mathbb{Q} \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

$\because |f(x)|\le x^2 \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right|\le|x|$

$\therefore 0\le\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\le|x|$ 夹逼定理.

$\therefore f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.

在不为0的点, $f(x)$ 显然不连续.

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. 设函数 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)\cdot|\sin x|$ 证明 $f(0)=0$ 是 $F'(0)$ 存在的充分必要条件.

① 充分性：由 $f(0)=0$，得 $F(0)=0$.

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)\cdot|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot|\sin x|$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\lim_{x\to 0}|\sin x|=f'(0)\cdot 0=0.$$

② 必要性：设 $F'(0)$ 存在，则 $F'_+(0)=F'_-(0)$

$$\because F'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)|\sin x|}{x}=f(0)$$

$$F'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)|\sin x|}{x}=-f(0)$$

$$\therefore f(0)=-f(0)\Rightarrow f(0)=0.\qquad \square$$

例. 已知当 $x\to 0$，$x+a\ln(1-x)+bx\sin 3x$ 是 x 的3阶无穷小，求 a,b.

Taylor 展开：（↑即：$\frac{y_5}{x^3}=$常数 $(x\to 0)$）

$$\because \ln(1-x)=0-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\qquad \therefore y_5=c\cdot x^3+o(x^3),\ c\neq 0.$$

$$\sin 3x=0+3x-\frac{9}{2}x^3+o(x^3)$$

$$\therefore y_5=x+a\left[-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]+o(x^3)+bx\cdot 3x+o(x^3)$$

$$=(1-a)x+\left(3b-\frac{1}{2}a\right)x^2-\frac{1}{3}a\,x^3+o(x^3)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1-a=0\\3b-\frac{1}{2}a=0\\-\frac{1}{3}a\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=\frac{1}{6}.\end{cases}$$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 已知 $f'(0)=0$, $f''(0)=2$, 求极限 $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\ln(1+x))-f(x)}{x^3}$.

由 Lagrange, $\exists \xi = x+\theta[\ln(1+x)-x]$, $0<\theta<1$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(\ln(1+x))-f(x)}{\ln(1+x)-x}$

$\therefore L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\ln(1+x)-x]f'(\xi)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\xi)}{\xi}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi}{x}$

(等价)

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi-0}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi}{x}$

∵ 对1项: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-x}{1+x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}$.

对2项: 当 $x\to 0$, $\xi\to 0$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi-0}=\lim\limits_{\xi\to 0}\dfrac{f'(\xi)-f'(0)}{\xi-0}$

$=f''(0)=2$.

对3项: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\theta[\ln(1+x)-x]}{x}$

$=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\theta[\ln(1+x)-x]}{x}=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\theta\cdot\frac{-x}{1+x}}{1}$

$=1+\lim\limits_{x\to 0}-\theta\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}=1+0=1$.

$\therefore L=-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=-1$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

例. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导. $f(0)=f(1)=0$. $\min\limits_{0<x<1} f(x)=-1$.

证明: $\exists \xi\in(0,1)$ 使得 $f''(\xi)\geq 8$.

设最小值点为 $c\in(0,1)$. ↗欲得二阶导, 则考虑展开.

在 $x_0=c$ 处 Taylor 展开:

$$f(0)=f(c)+f'(c)\cdot(-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\cdot c^2.$$

$$f(1)=f(c)+f'(c)\cdot(1-c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\cdot(1-c)^2$$

代入 $f(0)=f(1)=0$. $f(c)=-1$. $f'(c)=0$ $\Rightarrow f''(\xi_1)=\frac{2}{c^2}$. $f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-c)^2}$

∴ 若 $0<c\leq\frac{1}{2}$. 有 $f''(\xi_1)\geq 8$.

若 $\frac{1}{2}\leq c<1$. 有 $f''(\xi_2)\geq 8$. □.

例. 已知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上三阶可导. 证明: $\exists \xi\in(a,b)$, 使得

$$F(b)=F(a)+\frac{(b-a)}{2}[F'(a)+F'(b)]-\frac{F'''(\xi)}{12}(b-a)^3.$$

↖通过多次中值定理相消高阶导.

令 $G(t)=F(t)-F(a)-\frac{(t-a)}{2}[F'(a)+F'(t)]$

由 Cauchy, $\frac{G(b)-G(a)}{(b-a)^3-0}=\frac{G'(\xi_1)}{[(\xi_1-a)^3]'}$

即: $\frac{G(b)}{(b-a)^3}=\frac{F'(\xi_1)-F'(a)-(\xi_1-a)F''(\xi_1)}{6(\xi_1-a)^2}$ (*)

令 $H(t)=F'(t)-F'(a)-(t-a)F''(t)$.

由 Cauchy, $\frac{H(\xi_1)-H(a)}{6(\xi_1-a)^2-0}=\frac{H'(\xi)}{[6(\xi-a)^2]'}$

即 $(*)=\frac{F'''(\xi)}{-12}$ ∴ 综上, $G(b)=-\frac{F'''(\xi)}{12}\cdot(b-a)^3$. □.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. 已知 $f'(x)$ 连续且 $f(1)=3$. 求 $\int_0^1 [1+xf'(x)]e^{f(x)}dx$.

$$\int [1+xf'(x)]e^{f(x)}dx = \int e^{f(x)}dx + \int xf'(x)e^{f(x)}dx$$
$$= \int e^{f(x)}dx + \int x\,de^{f(x)}$$
$$= \int e^{f(x)}dx + xe^{f(x)} - \int e^{f(x)}dx = xe^{f(x)} + C.$$

$\therefore y = xe^{f(x)}\Big|_0^1 = e^3$.

例. 求 $3xy'-y-3xy^4\ln x=0$ 的通解.

$3xy'-y = 3xy^4\ln x$

$\Rightarrow \frac{3x}{y^4}\cdot y' - \frac{1}{y^3} = 3x\ln x$.

令 $t=\frac{1}{y^3}$. $t' = \frac{-3}{y^4}\cdot y'$

$\therefore -xt'-t = 3x\ln x \Rightarrow t' + \frac{1}{x}t = -3\ln x$.

$a(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow A(x)=\ln|x|$. $b(x)=-3\ln x$

$\therefore t = e^{-A(x)}\cdot[\int e^{A(x)}\cdot b(x)\,dx + C]$

$= \frac{1}{x}\cdot[\int -3x\ln x\,dx + C] = \frac{1}{x}\cdot[-\frac{3}{2}x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + C]$

$\therefore \frac{1}{y^3} = -\frac{3}{2}x(\ln x - \frac{1}{2}) + \frac{C}{x}$.

例. 求 $xy''+(x-1)y'=x^3$ 的通解.

$y''+\frac{x-1}{x}y' = x^2$. 令 $t=y' \Rightarrow t' + \frac{x-1}{x}t = x^2$

$\therefore y' = C_1xe^{-x} + x^2 - x$

$\therefore y = C_1(x+1)e^{-x} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_2$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App