微积分 上

No. 1.

Date

若T为函数f(x)的最小正周期，求证 $\frac{T}{a}$ 为 f(ax+b) 的最小正周期.

① 证 $\frac{T}{a}$ 为 f(ax+b) 的一个周期：

∵ f(x+T) = f(x)

∴ $f(a(x+\frac{T}{a})+b) = f(ax+b+T) = f(ax+b)$. □.

② 证 $\frac{T}{a}$ 为 f(ax+b) 的最小正周期：

⇔ 证 f(ax+b) 的任何周期 $q \geq \frac{T}{a}$. ⇔ $aq \geq T$.

∵ $f(x) = f(a\cdot\frac{x-b}{a}+b) = f(a\cdot(\frac{x-b}{a}+q)+b)$

$= f(x+aq)$

∴ aq 为 f(x) 的一个周期. ⇒ $aq \geq T$. □.

$\sin x^2$ 不是周期函数：

法二：周期函数的零点成均匀分布. 而 $\sin x^2 = 0$ 的根为 $x = \sqrt{k\pi}$，显然不均匀.

法一：假设 $y = \sin x^2$ 是周期函数. 则 ∃T，对 ∀x：$\sin(x+T)^2 = \sin x^2$.

令 x=0. ⇒ $T^2 = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$.

令 $x = \frac{\pi}{2}$. ⇒ $(\frac{\pi}{2}+T)^2 = \frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{N}$

显然矛盾. ∴ 假设不成立. □.

判定以下函数在所给区间上的有界性：

(1). $y = \frac{x}{x^2+1}$ $(|x|<+\infty)$ (2). $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ $(|x|<+\infty)$.

(1). 随|x|个，1分母个更快.

当 $x\to\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = 0$

∵ 函数在 $x\to\pm\infty$ 时极限为 0. ~~且在有限区间内函数值也是有限的.~~

∴ ∃M>0，使 $|y| = |\frac{x}{x^2+1}| \leq M$ 对 ∀ $|x|<+\infty$ 成立.

取 $M = \frac{1}{2}$. ∵ $|\frac{x}{x^2+1}| \leq \frac{1}{2}$ ($x=\pm1$ 时取等).

∴ $y = \frac{x}{x^2+1}$ 在 $|x|<+\infty$ 上有界.

↑ 类似于找极值.

可求导.

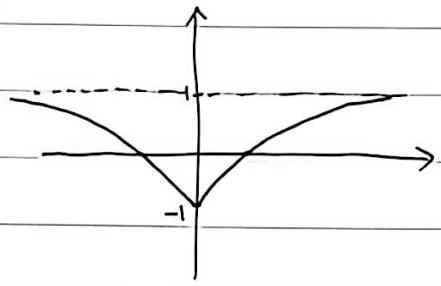
KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

(2). 当 $x\to+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$.

对 $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$. $f'(x)=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$. 且 $f(x)$ 为偶.

∴ 可得大致图像:



∴ 有界. □.

$\frac{\sin x}{x}$ 有界.

令 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. 则 $f(-x)=\frac{-\sin x}{-x}=f(x)$. 偶. 研究 $x>0$ 即可.

由 $x>0$ 时, $x>\sin x$ 可知, 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\sin x}{x}<1$.

又∵ 当 $x\geq\frac{\pi}{2}$, 显然有 $\left|\frac{\sin x}{x}\right|<1$.

∴ $\forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 取 $M=1$, 有 $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leq M$. □.

$f(x)=\sin x+D(x)$ 不是周期函数. $D(x)=\begin{cases}1 & x\text{ 有理}\\ 0 & x\text{ 无理}.\end{cases}$

反证. 假设 $f(x)$ 为周期 T.

①. 若 T 为有理数. 则有: $f(0)=f(T)\Leftrightarrow \sin 0+D(0)=\sin T+D(T)$

$\Leftrightarrow 0+1=\sin T+1$

$\Leftrightarrow T=k\pi, k\in\mathbb{Z}$

显然矛盾!

②. 若 T 为无理数. 则有: $f(-T)=f(0)=f(T)$

$\Leftrightarrow \sin(-T)+D(-T)=\sin 0+D(0)=\sin T+D(T)$

$\Leftrightarrow \sin(-T)+0=0+1=\sin T+0$

不可能有 $\sin T$、$\sin(-T)$ 同时为 1 的情况.

∴ 综上, $f(x)$ 非 T. □.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$f(x-2)=x^2-1$. $g(f(x))=\frac{1+x}{1-x}$. 求 $g(3)$.

令 $t=x-2 \Rightarrow x=t+2$. 代入 $f(x-2)=x^2-1$ 得 $f(x)=x^2+4x+3$.

∵ 求 $g(3)$

∴ 令 $f(x)=3 \Rightarrow x=0$ 或 -4.

∴ $g(f(x))=\frac{1+0}{1-0}$ 或 $\frac{1+(-4)}{1-(-4)}=1$ 或 $-\frac{3}{5}$. □.

证明 $f(x)=x\cos x$ 不是周期函数.

假设 $f(x)$ 存在周期 T. 则应有 $f(x)=f(x+T)$.

即 $x\cos x=(x+T)\cos(x+T)$.

令 $x=0$. $\Rightarrow 0=T\cos T$. ∵ $T\neq 0$ ∴ $\cos T=0$. ①

令 $x=\frac{\pi}{2}$. $\Rightarrow 0=(\frac{\pi}{2}+T)\cos(\frac{\pi}{2}+T)=(\frac{\pi}{2}+T)(-\sin T)$

∵ $\frac{\pi}{2}+T\neq 0$ ∴ $\sin T=0$ ②

①、② 显然矛盾. ∴ 不存在该周期 T. □.

证明 $y=\frac{1}{2}|e^x-e^{-x}|$ 的反函数是 $x=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$

$\Leftrightarrow 2y=e^x-\frac{1}{e^x}$

$2ye^x=e^{2x}-1$. 令 $t=e^x$. 则 $t^2-2yt-1=0$.

解得 $t=\frac{2y\pm 2\sqrt{y^2+1}}{2}=y\pm\sqrt{y^2+1}$ 题目的是解出 x. 可退一步, 先求解 e^x 用 y 表达.

∵ $t=e^x>0$ ∴ 只可取 $y+\sqrt{y^2+1}$

∴ $e^x=y+\sqrt{y^2+1} \Rightarrow x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$. □.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$. 其中 $n\to+\infty$、$n\to-\infty$ 均成立.

利用 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$. 求证 $\lim\limits_{n\to-\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$.

令 $x=-n$. 则当 $n\to-\infty$. $x\to+\infty$

$$\lim_{n\to-\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x})^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x-1})^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[(1+\frac{1}{x-1})^{x-1}\cdot(1+\frac{1}{x-1})\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x-1})^{x-1}\cdot\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x-1})=e\cdot1=e.\quad\square.$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$.

$\because \sin n\in[-1,1]$

$\therefore \frac{-1}{n}\le\frac{\sin n}{n}\le\frac{1}{n}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-1}{n}\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$

即 $0\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}\le0$ $\therefore\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$. $\square$.

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$.

$$\because 0\le\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{n}\cdot\underbrace{\frac{2}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2}}\cdot\frac{2}{1}\le\frac{2}{n}\cdot2$$

$$\Downarrow$$

乘积小于1

$$\therefore 0\le\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}\le\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0.\quad\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2!}=0.\quad\square.$$

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 3

Date

12. (1) 奇偶项.

X 利用单调有界收敛原理研究以下数列的极限:

3, $3+\frac{1}{3}$, $3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}$, $3+\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{3}}}$, ……

$x_1=3$. $x_n=3+\frac{1}{x_{n-1}}$

$\because x_n-x_{n-1}=3+\frac{1}{x_{n-1}}-x_{n-1}=\frac{-x_{n-1}^2+3x_{n-1}+1}{x_{n-1}}$

$\therefore$ 令 $f(t)=\frac{-t^2+3t+1}{t}$ 在 $t\in(\frac{3-\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{2})$ 上 $f(t)>0$.

($t=x_{n-1}>0$).

$\because x_1\in(\frac{3-\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{2})$ 且 x_n 的递推关系使得 x_n 始终在该区间内

$\therefore f(t)>0$ 即 $x_n-x_{n-1}>0 \Rightarrow \{x_n\}$ 递增.

又 $\because \{x_n\}$ 有上界

$\therefore \{x_n\}$ 收敛. 记 l 为其极限.

由 $x_n=3+\frac{1}{x_{n-1}}$ 两边令 $n\to\infty$ 得 $l=3+\frac{1}{l}$.

解得 $l=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

又 $\because l>3$

$\therefore l=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. 口.

证明: 数学归纳法.

$x_1\in$ 区间.

假设 $x_k\in$ 区间.

证: $x_{k+1}\in$ 区间

记 $T=(\frac{3-\sqrt{13}}{2},\frac{3+\sqrt{13}}{2})$

$x_1=3\in T$.

假设 $x_k\in T$.

证明: $x_{k+1}\in T$.

即证 $-x_{k+1}^2+3x_{k+1}+1>0$.

$\because x_{k+1}=3+\frac{1}{x_k}$

$\therefore -x_{k+1}^2+3x_{k+1}+1=-\frac{1}{x_k^2}-\frac{3}{x_k}+1=g(\frac{1}{x_k})$

$\because x_k\in(3,\frac{3+\sqrt{13}}{2})$

$\therefore \frac{1}{x_k}\in(\frac{2}{3+\sqrt{13}},\frac{1}{3})=(\frac{\sqrt{13}-3}{2},\frac{1}{3})$

$\therefore g(\frac{1}{x_k})>0$. 口.



KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

求：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+2}$

$ys=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2(1+\frac{1}{n})}}{n(1+\frac{2}{n})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{3}}\cdot(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{3}}}{n\cdot(1+\frac{2}{n})}=0$

求：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$

$ys=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1-n)(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}.$

求：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$.

$ys=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}$

$=e\cdot 1=e.$

求：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{1+a^n}$ $(a\geq 0)$.

$ys=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a^n}+1}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a})^n+1}$

① 当 $a=1$. $ys=\frac{1}{2}$.

② 当 $0\leq a<1$. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a})^n=\infty$. $\therefore ys=0$.

③ 当 $a>1$. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a})^n=0$. $\therefore ys=1$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求：$\lim_{x\to 0}(1+\cos x)^{3\sec x}$

$$ys=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$$ 当 $x\to 0$，$\cos x\to 1$.

$$=\lim_{t\to 1}(1+t)^{\frac{3}{t}}=2^3=8.$$

求：$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$.

当 $x\to\frac{\pi}{2}$，$\cos x\to 0$

$$ys=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{3}{t}}=e^3.$$

求：$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$ $ys=\lim_{x\to\pi^+}\frac{-1}{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

当 $x\to\pi^+$，分子为正，分母 $\sin x$ 为负号.

去根号1约分时要格外注意正负号.

求：$\lim_{n\to+\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

$$ys=\lim_{n\to+\infty}\sin[n\pi+(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)]$$

由诱导公式：$=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\cdot\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$$=\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$$

$\because 0<\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}<\frac{\pi}{2n}$ $\Rightarrow$ 由夹逼定理，$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$

$\therefore ys=0$.

口.

KOKUYO
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

若 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$. 求常数 a,b.

$\because \frac{x^2+1}{x+1}-ax-b = x-1+\frac{2}{x+1}-ax-b = (1-a)x-(b+1)+\frac{2}{x+1}$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\left[(1-a)x-(b+1)+\frac{2}{x+1}\right] = \lim_{x\to\infty}(1-a)x - \lim_{x\to\infty}(b+1) + \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x+1}=0$

$\Rightarrow \begin{cases} 1-a=0 \\ b+1=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a=1 \\ b=-1. \end{cases}$

求: $\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

当 $x\to\infty$, $\frac{1}{x}\to 0$. 令 $t=\frac{1}{x}$.

$ys = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$

$\sqrt{x}-\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ $(x\to 0^+)$ 关于 x 的主部?

$ys = \sqrt{x}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) = \sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}\cdot\frac{x+1-1}{\sqrt{x+1}+1}$

$\sim \sqrt{x}\cdot x\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$

$\tan x-\sin x$ $(x\to 0)$ 关于 x 的主部?

$ys = \frac{\sin x}{\cos x}-\sin x = \sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right) = \sin x\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x}$

$\sim x\cdot\frac{\frac{1}{2}x^2}{1} = \frac{1}{2}x^3.$

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$\sqrt[3]{\cos x}-1$ $(x\to 0)$ 关于 x 的主部？

由 $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，$x\to 0$ ：当 $x\to 0$ 时 $\cos x \approx 1-\frac{1}{2}x^2$.

$\therefore ys = \sqrt[3]{1-\frac{1}{2}x^2}-1 \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3} = -\frac{1}{6}x^2$

$\sqrt[3]{x}-1$ $(x\to 1)$ 关于 $x-1$ 的主部？

$x-1\to 0$.

$ys = \sqrt[3]{1+(x-1)}-1 \sim \frac{x-1}{3}$

求：$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^9-1}{1-\cos 3x}$. 当 $x\to 0$，$x^2\to 0$，$3x\to 0$.

$ys = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[9]{1+x^2}-1}{1-\cos 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{9}}{\frac{1}{2}(3x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{\frac{9}{2}x^2} = 2.$

求：$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}{x\sin x}$

$ys = \lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-\cos^2 x}{x\sin x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x\sin x-1+\sin^2 x}{x\sin x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(x+\sin x)}{x\sin x(\sqrt{1+x\sin x}+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{x+\sin x}{x}$

（$\sqrt{1+x\sin x}+\cos x \to 2$）

$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1.$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

求: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})}{(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2\cdot 2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{2}=0.$$

求: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$.

$1-x\to 0$. $1-x^2=(1+x)(1-x)\sim 2(1-x)$. $1-x\to 0$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{2(1-x)}{\sin\pi x}.$$

令 $t=1-x\to 0$. 则 $x=1-t$.

则 $\text{原式}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{\sin\pi(1-t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{\sin\pi t}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{\pi t}=\dfrac{2}{\pi}$.

诱导公式.

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x(1+e^x)}$

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$. 为无穷小量. $\left|\dfrac{1}{1+e^x}\right|<1$. 有界.

$\therefore$ 原式 $=0$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

用定义证明函数极限：

① 找δ.
② 尽量化简 $|f(x)-L|$ 使之与 $|x-a|$ 关联（因为 $|x-a|<\delta$）.

e.g. 1 证：$\lim\limits_{x\to 2}(3x-1)=5$.

$\forall \varepsilon>0$，需找到 $\delta>0$，使：当 $0<|x-2|<\delta$ 时，$|(3x-1)-5|<\varepsilon$.

$\because |(3x-1)-5|=|3x-6|=3|x-2|<\varepsilon$ 即 $|x-2|<\frac{\varepsilon}{3}$

$\therefore$ 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$. 当 $|x-2|<\delta$ 时，$|(3x-1)-5|<\varepsilon$ 成立.

e.g. 2. 证：$\lim\limits_{x\to 1}x^2=1$.

$\forall \varepsilon>0$，需找到 $\delta>0$，使：当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$|x^2-1|<\varepsilon$.

$|x^2-1|=|x+1||x-1|$

为控制 $|x+1|$，先假设 $|x-1|<1$. 即 $x\in(0,2)$. $\Rightarrow |x+1|<3$.

$\therefore |x^2-1|<3|x-1|<\varepsilon$. $\Rightarrow$ 取 $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{3}\}$.

当 $|x-1|<\delta$ 时，必有 $|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$

$\therefore |x^2-1|<\varepsilon$ 成立.

目的：放缩 $|x+1|$.

证明：$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=3$.

$\forall \varepsilon>0$，需找到 $\delta>0$，使：当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|<\varepsilon$.

$\because \left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|=|x+2||x-1|$

$\therefore$ 不妨设 $x\in(0,1)$ $\Rightarrow |x+2|<3$. $|x-1|<1$

$\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|<3|x-1|<\varepsilon$. $\Rightarrow$ 取 $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{3},1\}$.

则当 $|x-1|<\delta$ 时，必有 $|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$.

此时 $\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|<\varepsilon$ 成立. □.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Datu

证明：$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=0$.

$\forall \varepsilon>0$，要找到 $X>0$，使 $\forall x>X$ 时，$|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-0|<\varepsilon$.

$|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-0|=\frac{1}{|\sqrt{x+1}+\sqrt{x}|}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x}}$ → 大胆放缩!.

令 $\frac{1}{\sqrt{x}}=\varepsilon$ 即取 $X=\frac{1}{\varepsilon^2}$.

则当 $x>X=\frac{1}{\varepsilon^2}$，$\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$. ∴ $|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}-0|<\varepsilon$. 口.

求：$\lim_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ ($m\neq n$ 均为自然数).

B 加减运用不可用等价无穷小替换.

暴力拆开：$ys=\lim_{x\to0}\frac{1+C_n^1\cdot mx+C_n^2\cdot(mx)^2+\cdots+C_n^n\cdot(mx)^n-1-C_m^1\cdot nx-C_m^2\cdot(nx)^2-\cdots-C_m^m(nx)^n}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{n}{1}\cdot mx+\frac{n(n-1)}{2}m^2x^2+\bigcirc m^3x^3+\cdots+\bigcirc m^nx^n-1-\frac{m}{1}\cdot nx-\frac{m(m-1)}{2}n^2x^2-\bigcirc nx^3-\cdots}{x^2}$

由于 $\bigcirc m^3x^3,\cdots,\bigcirc m^nx^n$，$\bigcirc n^3x^3,\cdots,\bigcirc n^mx^m$ 均为 x^2 的高阶无穷小，可忽略

∴ $ys=\lim_{x\to0}\frac{1+nmx+\frac{1}{2}n^2m^2x^2-\frac{1}{2}nm^2x^2-1-mnx-\frac{1}{2}m^2n^2x^2+\frac{1}{2}mn^2x^2}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot mn(n-m)=\frac{mn(n-m)}{2}$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

P0 $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$

求：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$

$$\text{原式}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+\cdots+(x^n-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\cdots+(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)\right]$$

$$=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

求：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

当$x\to0^+$，$\cos\frac{x}{2}<0$.

若$x\to0$时，$\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}$与$x^a$是同阶无穷小量，则$a=?$

由题意，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{x^a}=1$.

化简：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-x^2)-(1+x^2)}{x^a(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-2x^2}{x^a(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2})}=1$.

∵分母中$(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2})\to2$.

∴$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{x^a}=1$ $\Rightarrow a=2$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

求 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{x}$.

令 $t=\frac{\pi}{x}\to 0$. 则 $y=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\pi\sin t}{t}=\pi\cdot\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\pi$.

当 $x\to 0$，无穷小量 $x\sin\frac{1}{x}$ 是 $\sin x$ 的高/低/同阶无穷小量吗？

求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$.

↑不存在!

∴无法比较.

当 $x\to 1$. 与 $\ln x^2$ 等价的无穷小量是？ A. $2(x-1)$. B. x^2-1

C. x^2. D. $(x-1)^2$.

A: 求: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{\ln x^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2t}{\ln(t+1)^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2t}{2\ln(t+1)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2t}{2t}=1$.

令 $t=x-1\to 0$. ↗ 由 $x\sim\ln(x+1)$ ↗ ∴等价.

B: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\ln x^2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{\ln x^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{2t}{2\ln(t+1)}=1$.

↑ 令 $t=x-1\to 0$ ∴等价.

C: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2}{\ln x^2}=\frac{1}{0}\neq 1$. ∴不等价.

D: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\ln x^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^2}{2\ln(t+1)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^2}{2t}=0$

↑ 令 $t=x-1\to 0$ ∴不等价.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 8

Date

当 $x\to+\infty$ 时，$x\cos x$ 不是无穷大量.

∵ 当 $x\to+\infty$ 时，$\cos x$ 可能 $=0,-1,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\cdots$.

∴ $x\cos x\neq\infty$. 即 $x\to+\infty$ 时 $x\cos x$ 不是无穷大量.

求下列函数间断点及类型：

(1). $f(x)=\frac{x}{\tan x}$.　　(2). $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n+2}{x^n+1}$

(1). $f(x)=\frac{x}{\tan x}=\frac{x\cos x}{\sin x}$ ⇒ $x\neq k\pi$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$. $k\in\mathbb{Z}$.

（$x\neq k\pi$：分母为0；$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$：$\tan x$ 无定义）

∵ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.　∴ $x=0$ 为可去.

∵ $\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=\infty$　∴ $x=k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$, $k\neq0$) 为无穷.

∵ $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ 上无定义　∴ $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ 为可去.

且 $\lim=0$.

(2). $f(x)=\begin{cases}1 & (|x|>1)\\ 2 & (|x|<1)\\ \frac{3}{2} & (x=1)\\ \text{不存在} & (x=-1)\end{cases}$

∵ $f(1^-)=2$. $f(1^+)=1$.　∴ $x=1$ 为跳跃.

∵ $f(-1^-)=1$. $f(-1^+)=2$.　∴ $x=-1$ 为跳跃.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a,b,c>0)$.

$$y_5=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\frac{a^x+b^x+c^x}{3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{a^x+b^x+c^x}{3}}$$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{a^x+b^x+c^x-3+3}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}+1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{(a^x-1)+(b^x-1)+(c^x-1)}{3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{3x}+\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{3x}+\lim_{x\to 0}\frac{c^x-1}{3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln a}{3x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\ln b}{3x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\ln c}{3x}=\frac{1}{3}\ln abc$$

$$\therefore y_5=e^{\frac{1}{3}\ln abc}=\sqrt[3]{abc}.$$

~~求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{8}}{2}\right)^n$.~~

$$y_5=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}+8^{\frac{1}{n}}-1-1+2}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}+8^{\frac{1}{n}}-1-1}{2}+1\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+n\cdot\frac{2^{\frac{1}{n}}-1+8^{\frac{1}{n}}-1}{2}\right)$$

$2^{\frac{1}{n}}-1=\frac{1}{n}\ln 2+o(n)$

$$=1+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\cdot(2^{\frac{1}{n}}-1)+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\cdot(8^{\frac{1}{n}}-1)$$

$$=1+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n}\ln 2+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n}\ln 8$$

$$=1+\frac{\ln 2+\ln 8}{2}$$

$\frac{1}{n}\ln 2+\frac{1}{n}\ln 8$

$$=\lim_{n\to\infty}$$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 9

Date

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{8}}{2}\right)^n$.

$$ys=\lim_{n\to\infty} e^{n\ln\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{8}}{2}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\ln\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{8}}{2}}$$

$\ln(t+1)\sim t$

$$\because \lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{8}}{2}=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{8}}{2}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\sqrt[n]{2}-1+\sqrt[n]{8}-1}{2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}(\sqrt[n]{2}-1)+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}(\sqrt[n]{8}-1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n}\ln 2+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n}\ln 8=\frac{\ln 2+\ln 8}{2}=\ln 4$$

$$\therefore ys=e^{\ln 4}=4.$$

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且对 $\forall x,y$ 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

证明 f 处处连续.

令 $x=y=0 \Rightarrow f(0)=0$.

$$\because \lim_{y\to 0} f(x+y)=\lim_{y\to 0}[f(x)+f(y)]=\lim_{y\to 0} f(x)+\lim_{y\to 0} f(y)$$

$$=f(x)$$

$y\to 0$. $f(y)\to 0$.

$$\therefore \lim_{y\to 0} f(x+y)=f(x) \text{ 即 } \lim_{x+y\to x} f(x+y)=f(x)$$ □.

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续. $f(0)=f(2a)$. $f(a)\neq f(0)$.

证明至少有一点 $c\in(0,a)$, 使 $f(c)=f(c+a)$.

令 $g(x)=f(x)-f(x+a)$. $x\in(0,a)$. $x+a\in(a,2a)$.

$\therefore \begin{cases} g(0)=f(0)-f(a) \\ g(a)=f(a)-f(2a) \end{cases}$ 且 $f(0)=f(2a)$

$\therefore$ 得 $g(0)=-g(a)$.

由零点定理, $\exists c\in(0,a)$, 使 $g(c)=0$ 即 $f(c)=f(c+a)$. 口.

求: (1). $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$. (2). $\lim\limits_{x\to y}\dfrac{a^x-a^y}{x-y}$ $(a>0,a\neq 1)$.

(3). $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log x^2$. (4). $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2\cos^2\dfrac{x}{2}\right)^{3\sec x}$

(5). $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

(1). $\because \frac{x}{a}-1\to 0$

$$\text{原式}=\lim_{x\to a}\frac{\ln\frac{x}{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\ln\left(1+\left(\frac{x}{a}-1\right)\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{x}{a}-1}{x-a}=\frac{1}{a}.$$

(2). $$\text{原式}=\lim_{x\to y}\frac{a^y\left(a^{x-y}-1\right)}{x-y}=\lim_{x\to y}\frac{a^y\cdot(x-y)\ln a}{x-y}=a^y\ln a.$$

$\because x-y\to 0$.

(3). $$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\ln^2}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\ln^2}{\ln\left(1+(x-1)\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\ln^2}{x-1}=-\ln^2.$$

$\because x-1\to 0$

(4). $$\text{原式}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos x-1\right)^{\frac{3}{\cos x}}=e^3.$$

$\because \cos x\to 0$.

(5). $$\text{原式}=\lim_{x\to 1}\left(1+(1-x)\right)^{\tan\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}=\lim_{x\to 1}\left[1+(1-x)\right]^{\frac{1}{1-x}\cdot\tan\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(x-1)\right]\cdot(1-x)}$$

$$=\lim_{x\to 1}e^{\tan\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}(x-1)\right]\cdot(1-x)}=\lim_{x\to 1}e^{\frac{1-x}{\tan\frac{\pi}{2}(1-x)}}=e^{\frac{2}{\pi}}.$$

$\because \tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{-1}{\tan\alpha}$ $\quad \tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 10.

Date

$f(x)$ 在 $x=a$ 处可导. 证明: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}=2af(a)-a^2f'(a)$

左边 $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2f(a)-a^2f(a)+a^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(a)\cdot(x^2-a^2)}{x-a}+\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^2[f(a)-f(x)]}{x-a}$

$=f(a)\cdot\lim\limits_{x\to a}(x+a)-a^2\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=f(a)\cdot 2a-a^2\cdot f'(a)=$ 右边. □.

设 $f(0)=0$. $f'(0)=1$. 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-e^x)}{\ln(1+x)}=?$

令 $t=1-e^x$. 当 $x\to 0$. $t\to 0$.

$\because f'(0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}=1$.

$\therefore$ 当 $t\to 0$,

$f(t)\to t$. 即 $f(t)\sim t$, $t\to 0$.

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-e^x)}{\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x}{x}=-1$.

设对 $\forall x$, $f(x)$ 满足 $f(1+x)=2f(x)$, $f'(0)=c$ (c 为已知常数).
证明 $f'(1)$ 存在, 并求其值.

$\because f(1+0)=2f(0)$

$\therefore f(1)=2f(0)$.

$f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2f(h)-2f(0)}{h}=2\cdot\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}$

$=2\cdot f'(0)=2c$. $\therefore f'(1)$ 存在且为 $2c$.

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

设 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$, $f'(0)=2$. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan x^2}$.

$\because f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)}{h}=2$

$\therefore f(h)\sim 2h,\ h\to 0.$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{2(1-\cos x)}{\tan x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^2}=1.$$

当 $x\to 0$, $(1-\cos x)\to 0$.

则 $f(1-\cos x)\sim 2(1-\cos x)$.

设函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ 求 $f'(1)$.

对数求导法. $f'(x)=f(x)\cdot[\ln f(x)]'$.

$\because \ln f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(x-k)-\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(x+k)$

$\therefore [\ln f(x)]'=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x-k}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x+k}$.

$\therefore f'(x)=f(x)\cdot\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x-k}-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x+k}\right)$

P.S. 注意：不可直接代入 $f(1)=0$.
因为右边括号中的值为 ∞.
$0\times\infty$ 的值未知.
∴上面一团都没用!!!

提取 $(x-1)$. 令 $f(x)=(x-1)\cdot g(x)$.

$$g(x)=\frac{(x-2)(x-3)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

则 $f'(x)=(x-1)'g(x)+(x-1)g'(x)$

$=g(x)$

$$\therefore f'(1)=g(1)=\frac{(-1)(-2)\cdots(1-n)}{2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n+1)}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(n+1)!}=\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}.$$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 11.

Date

已知 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数，且 $f'(0)$ 存在。

设 $F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}\cdot\sin 2x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 证明 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续且可导。

∵ $f(-x)=f(x)$ 且 $f(0)=0$。

∴ 由 $f'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=k$。（$f'(0)$ 存在，记 $f'(0)=k$）。

$\Rightarrow f(h)\sim kh$，$h\to 0$。

∵ $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)\cdot\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx\cdot\sin 2x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}k\sin 2x=0=F(0)$。

∴ $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续。← $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=F(0)$

∵ $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}\cdot\sin 2x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x\cdot\frac{1}{2}}$

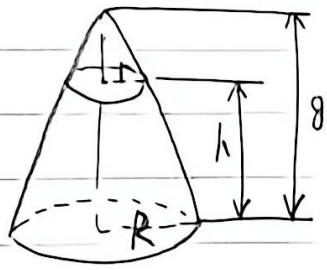
$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{kx}{x}\cdot 2=2k$。

∴ $F'(0)$ 在 $x=0$ 处可导。

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

如图，圆锥形容器高8m，底半径R=2m.
向其中注水，当水深h=6m时，水面上升
的速率为$\frac{dh}{dt}=\frac{2}{\pi}$ m/min，求此时水的
体积的变化率$\frac{dV}{dt}$



$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$. 要求$\frac{dV}{dh}$，即求V关于h的表达式，再求导.
(需不含r、R).

$\because V=\frac{1}{3}h(\pi r^2+\pi R^2+\sqrt{\pi r^2\cdot\pi R^2})=\frac{1}{3}\pi h(r^2+R^2+rR)$

且由相似，$\frac{r}{R}=\frac{8-h}{8}\Rightarrow r=\frac{\sqrt{2}(8-h)}{4}$

$\therefore V=\frac{\pi}{8}(\frac{1}{3}h^3-8h^2+64h)$.

$\Rightarrow\frac{dV}{dh}=\frac{\pi}{8}(h^2-16h+64)$.

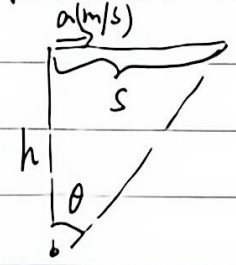
$\therefore\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{8}(h^2-16h+64)\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{1}{2}(h^2-16h+64)$.

当$h=6m$，$\frac{dV}{dt}=2\ m^3/min$.

设$f(x)=x^3$，求$f'(x^2)$.

$f'(x)=3x^2\Rightarrow f'(x^2)=3x^4$.

飞机在高h m处飞行速度为a m/s，位于航线正下方的地面有一探照灯跟踪飞机. 探照灯应以怎样的角速度转动能照到飞机？



$s=at$. 由$\tan\theta=\frac{s}{h}\Rightarrow\theta=\arctan\frac{at}{h}$.

$\therefore\omega=\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{1+(\frac{at}{h})^2}\cdot\frac{a}{h}=\frac{ah}{h^2+a^2t^2}$.

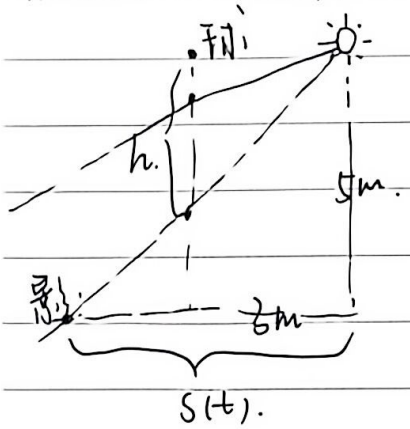
Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 12

Date

一盏5m高的路灯，照在一个距灯3m远、从5m高处落下的小球上．球的影子沿地面移动，求当球离地面3m高时影子移动的速率．



设球下落高度为h．$h(t)=\frac{1}{2}gt^2$．

设影子距路灯底部距离为 $S=S(t)$．

$\because \frac{h}{5}=\frac{3}{s}$

$\therefore \frac{ds}{dh}=\frac{-15}{h^2}$

$V=\frac{ds}{dt}=\frac{ds}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=\frac{-15}{h^2}\cdot gt.$

当球离地3m即 $h=2m$ 时，$t=\frac{2}{\sqrt{g}}$

$\therefore$ 此时 $V=\frac{-15\sqrt{g}}{2}$ m/s．

设 $f(0)=0$，$f'(0)=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\sin x)}{\ln(1+2x)}=?$

$$y_S=\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{f(\sin x)-f(0)}{2(\sin x-0)}$$

（$\ln(1+2x)\sim 2x$，$2x\to0$）．（$x\sim\sin x$，$x\to0$）

$$=\lim_{\sin x\to0}\frac{1}{2}\cdot\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x-0}=\frac{1}{2}\cdot f'(0)=\frac{1}{2}\cdot 2=1.$$

$f(x)$ 在 $x=a$ 的邻域中有定义，则其在 $x=a$ 处可导的充要条件有：AB．

A. ✓ $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在．

B. ✓ $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在．

C. $\lim\limits_{h\to+\infty}h[f(a+\frac{1}{h})-f(a)]$ 存在．

↳ 令 $t=\frac{1}{h}\to0^+$．

无法说明 0^- 时情况．

反例：$f(x)=\begin{cases}x, & x\geq1\\ 2-x, & x<1\end{cases}$ $(a=1)$．

D. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在．

反例：$f(x)=|x|$．取 $a=0$．

KOKUYO

设 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处：A. 右导数存在，B. 左导数存在，C. 左连续，D. 右连续。

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-\frac{2}{3}}{x-1}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2+2t+\frac{1}{3}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\left(t+2+\frac{1}{3t}\right)\to+\infty.\quad\therefore\text{右导数不存在.}$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}}{x-1}=\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=2.$$

$\therefore$ 左导数存在.

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{3}x^3=\frac{2}{3}=f(1)\quad\therefore\text{左连续.}$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}x^2=1\neq f(1)\quad\therefore\text{右不连续.}$$

设函数 $f(x)$ 在 $N(0,\delta)$ 内有定义，当 $x\in N(0,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\le x^2$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导。

由题意，$|f(0)|\le 0\Rightarrow f(0)=0$.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}.$$

由 $|f(x)|\le x^2\Rightarrow\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le|x|\quad(x\neq 0)$. 即 $-|x|\le\frac{f(x)}{x}\le|x|$.

由夹逼定理，$\lim_{x\to 0}-|x|\le\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\le\lim_{x\to 0}|x|$

$\therefore\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0.\Rightarrow f'(0)=0.$ □.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

计算下列函数值的近似值：

(1). $\arctan 1.02$

令 $f(x)=\arctan x$.

注意到，$f(1)=\frac{\pi}{4}$. ← 固定 1 为 x_0.

$\Delta y=f(1.02)-f(1)\approx dy$

($1.02=x_0+\Delta x$，$1=x_0$)

$\because dy|_{x=1}=f'(x)dx=f'(x)\cdot\Delta x$

$=\frac{1}{1+x^2}\cdot\Delta x=0.01$

$\therefore f(1.02)=f(1)+dy=\frac{\pi}{4}+0.01$

≈ 0.7954.

(2). $\sqrt[3]{1.02}$.

令 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$.

注意到，$f(1)=1$.

$\Delta y=f(1.02)-f(1)\approx dy$

$\because dy|_{x=1}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cdot\Delta x=\frac{1}{3}\cdot 0.02$

$\therefore f(1.02)=f(1)+dy=1+\frac{1}{3}\cdot 0.02$

≈ 1.007.

求曲线 $\begin{cases}x=f(t)-1\\ y=f(e^{3t}-1)\end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程. 其中 f 可导. $f'(0)\neq 0$. $f(0)=1$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{f'(e^{3t}-1)\cdot 3e^{3t}}{f'(t)}$.

$\because x=0,\ y=1$ 在曲线上

$\therefore f(t)=1.\quad f(e^{3t}-1)=1$

↳ 一个解为 $t=0$.

$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{f'(0)\cdot 3}{f'(0)}=3$

$\Rightarrow l:\ y-1=3x$ 即 $y=3x+1$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$y = \ln x + x$. 求 $\frac{dx}{dy}$, $\frac{d^2x}{dy^2}$.

$\because \frac{dy}{dx} = y' = \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}$.

$\therefore \frac{dx}{dy} = \frac{x}{1+x}$.

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{x}{1+x}\right)}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} \cdot \frac{x}{1+x} = \frac{x}{(1+x)^3}$$

求 $[\ln(2x+1)]^{(100)}\Big|_{x=0}$.

$$\because [\ln(2x+1)]^{(100)} = \left\{[\ln(2x+1)]'\right\}^{(99)} = \left(\frac{2}{2x+1}\right)^{(99)}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2x+1}\right)^{99} = 2 \cdot \frac{(-1)^{99} \cdot 99! \cdot 2^{99}}{(2x+1)^{100}}$$

$$= \frac{(-1)^{99} \cdot 99! \cdot 2^{100}}{(2x+1)^{100}}$$

$$\therefore y^{(5)} = \frac{-99! \cdot 2^{100}}{(0+1)^{100}} = -99! \cdot 2^{100}$$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$f(x)=\sin^2 x$. 求 $f(x)^{(n)}$.

$$f(x)^{(n)}=\{[f(x)]'\}^{(n-1)}=(2\sin x\cos x)^{(n-1)}=(\sin 2x)^{(n-1)}$$

$$=2^{n-1}\cdot\sin\left[2x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right]$$

$f(x)=xe^x$. 求 $f(x)^{(n)}$.

由 Leibniz 规则,

$$f(x)^{(n)}=(e^x\cdot x)^n=C_n^0\cdot(e^x)^{(n-0)}\cdot(x)^{(0)}+C_n^1\cdot(e^x)^{(n-1)}\cdot(x)'+\cdots\cdots$$

↑ 全为 0.

$$=e^x\cdot x+n\cdot e^x\cdot 1.$$

$$=e^x(x+n).$$

$y=y(x)$ 由 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定, f 二阶可导, $f'\neq 1$. 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(*).

由(*)式, 两边对 x 求导:

$$e^{f(y)}+xe^{f(y)}\cdot f'(y)\cdot y'=\ln 29\cdot e^y\cdot y'$$

$$\Rightarrow y'=\frac{e^{f(y)}}{e^y\ln 29-xf'(y)e^{f(y)}}$$

再代入(*) $\Leftrightarrow x=\frac{e^y\cdot\ln 29}{e^{f(y)}}$

$$\Rightarrow y'=\frac{e^{f(y)}}{e^y\ln 29\,[1-f'(y)]}=\frac{1}{x[1-f'(y)]}$$ ····· 再代入.

对 y' 再求导: $y''=-\frac{1}{x^2[1-f'(y)]^2}\cdot[1-f'(y)-xf''(y)y']$

$$\therefore\frac{d^2y}{dx^2}=y''=\frac{f''(y)-[1-f'(y)]^2}{x^2[1-f'(y)]^3}$$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

求 $y=e^x+x^3$ 的反函数的二阶导数. $\frac{d^2x}{dy^2}$.

steps.

1. 求原函数一阶导. $\frac{dy}{dx}=y'=e^x+3x^2$.

2. 得反函数一阶导 $\rightarrow$ $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{e^x+3x^2}$

3. $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d(\frac{dx}{dy})}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=\left(\frac{1}{e^x+3x^2}\right)'\cdot\frac{1}{e^x+3x^2}=\frac{-e^x-6x}{(e^x+3x^2)^3}$

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, $f'(0)=0$. 试证: $\exists\xi\in(0,1)$ 使 $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$.

$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}\Leftrightarrow(1-\xi)f''(\xi)-2f'(\xi)=0$.

(要使用 Rolle 定理, 常有 $F'(x)=0$ 形式).

构造辅助函数 $F(x)=(1-x)^2f'(x)$ ☆

有: $F'(x)=-2(1-x)f'(x)+(1-x)^2f''(x)$

$=(1-x)[(1-x)f''(x)-2f'(x)]$.

∵ $F(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, $(0,1)$ 可导. $F(0)=F(1)=0$. 由 Rolle 定理.

∴ $\exists\xi\in(0,1)$ 使 $F'(\xi)=0$ 即 $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

[注意]. 由 $[e^{g(x)}\cdot f(x)]'=e^{g(x)}\cdot[f'(x)+g'(x)\cdot f(x)]$.

看到类似形式的都可构造.

构造辅助函数 $G(x)=e^{2\ln(1-x)}\cdot f'(x)$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

证明：当 $x\geq 1$ 时，$\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$.

令 $x=\tan\theta$. 由 $x\geq 1 \Rightarrow \tan\theta\geq 1 \Rightarrow \theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$.

则 $\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}$

$=\theta-\frac{1}{2}\arccos\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\theta-\frac{1}{2}\arccos(\sin 2\theta)$.

$=\theta-\frac{1}{2}\arccos[\cos(2\theta-\frac{\pi}{2})]$

当 $\theta\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$, $2\theta\in[\frac{\pi}{2},\pi)$. $\sin 2\theta=\cos(2\theta-\frac{\pi}{2})$

$=\theta-\frac{1}{2}(2\theta-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{4}$. □.

$f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上满足 $f'(x)=f(x)$，$f(0)=1$. 证明 $f(x)=e^x$.

由 $f'(x)=f(x) \Rightarrow f'(x)-f(x)=0$.

构造辅助函数 $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$. 则 $F'(x)=\frac{f'(x)\cdot e^x-f(x)\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$

显然，$F'(x)=0 \Rightarrow F(x)=C$ 为常数.

代入 $x=0$. $F(0)=\frac{f(0)}{e^0}=\frac{1}{1}=1=C$.

$\therefore F(x)=1 \Rightarrow f(x)=e^x$. □.

类题. 若 $0\leq a\leq b\leq a+b\leq c$.
要证 $f(a)+f(b)\geq f(a+b)$.
则分类：
① $a=0$. 显然 $f(b)\geq f(b)$ 成立.
② $a>0$. 同下.

$f(x)$ 在 $[0,c]$ 上有单减导函数 $f'(x)$. $f(0)=0$. 证明：$\forall a,b$ 满足 $0<a<b<a+b<c$，恒有 $f(a)+f(b)>f(a+b)$.

由 Lagrange 中值定理，$\exists \xi_1\in(0,a)$ 使 $f'(\xi_1)=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}$

即 $f(a)=af'(\xi_1)$.

同理，$\exists \xi_2\in(b,a+b)$ 使 $f'(\xi_2)=\frac{f(a+b)-f(b)}{a+b-b}$ 即 $af'(\xi_2)=f(a+b)-f(b)$

$\because \xi_1<\xi_2$ 且 $f'(x)\downarrow$

$\therefore f'(\xi_1)>f'(\xi_2) \Rightarrow af'(\xi_1)>af'(\xi_2) \Rightarrow f(a)>f(a+b)-f(b)$

即 $f(a)+f(b)>f(a+b)$. □.

KOKUYO
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

求: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\ln x}$.

$\frac{\infty}{\infty}$. 可洛. $ys = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x}$

令 $t=\frac{1}{x}\to +\infty$.

则 $ys = \lim\limits_{t\to+\infty} -te^t = -\infty$. $(te^t\to+\infty,\ t\to+\infty)$.

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$ys = \lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\arctan x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\arctan x}{x}}$.

对指数: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\arctan x - \ln x}{x^2}$ $(\frac{\infty}{0}$ 可洛).

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x}}{2x}$ $\left[\begin{array}{l} 1+x^2\to 1 \\ \arctan x\sim x,\ x\to 0 \end{array}\right]$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x\cdot(1+x^2)}{2x^2(1+x^2)\arctan x} \therefore = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x\cdot(1+x^2)}{2x^3}$

再洛 $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}\cdot(1+x^2)-\arctan x\cdot(2x)}{6x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\arctan x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$.

$\therefore ys = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

$$ys=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}.$$

∵ 当 $x\to+\infty$, $\frac{\sin x}{x}\to 0$.

∴ $ys=\frac{1-0}{1+0}=1$.

证明：若 $a^2-3b<0$，则实系数方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 只有唯一的实根.

证：令 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$.

∵ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

∴ 由零点定理，$f(x)=0$ 有根.

假设 ∃ $x_1<x_2$, $f(x_1)=f(x_2)=0$.

则由 Rolle 定理，∃ $\xi\in(x_1,x_2)$ 使 $f'(\xi)=0$ 即 $3\xi^2+2a\xi+b=0$.

∃ $\Delta=4a^2-12b\geq 0$ 即 $a^2-3b\geq 0$.

与题给 $a^2-3b<0$ 矛盾！

∴ $f(x)=0$ 仅有唯一实根.

证明：$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$. $x>0$.

⇔ 证 $\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{x}<1$.

令 $f(t)=\ln(1+t)$

由 Lagrange，∃ $\xi\in(0,x)$ 使 $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\ln(1+x)}{x}$

即 $\frac{1}{1+\xi}=\frac{\ln(1+x)}{x}$. ∵ $\frac{1}{1+\xi}<1$, $\frac{1}{1+\xi}>\frac{1}{1+x}$.

∴ $\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{x}<1$. □.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

证明：$\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2} < \frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a} < \frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$. $a>1$. $n\geq 1$.

$\Leftrightarrow$ 证 $\ln a \cdot \frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2} < a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}} < \ln a \cdot \frac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

令 $f(x)=a^{\frac{1}{x}}$.

$f'(x)=a^{\frac{1}{x}}\cdot \ln a \cdot (-\frac{1}{x^2})$.

由 Lagrange，$\exists \xi \in (n, n+1)$，$f'(\xi)=\frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n}$

即 $a^{\frac{1}{\xi}}\cdot \ln a \cdot (-\frac{1}{\xi^2}) = a^{\frac{1}{n+1}}-a^{\frac{1}{n}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\xi^2}\cdot a^{\frac{1}{\xi}}\cdot \ln a = a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}$

$\because \xi > n \Rightarrow \frac{1}{\xi}<\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{\xi^2}\cdot a^{\frac{1}{\xi}} < \frac{1}{n^2}\cdot a^{\frac{1}{n}}$.

$\xi < n+1 \Rightarrow \frac{1}{\xi^2}\cdot a^{\frac{1}{\xi}} > \frac{1}{(n+1)^2}\cdot a^{\frac{1}{n+1}}$

$\therefore \frac{\ln a}{(n+1)^2}\cdot a^{\frac{1}{n+1}} < a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}} < \frac{\ln a}{n^2}\cdot a^{\frac{1}{n}}$. □.

设 ① $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续. ② $f''(x)$ 在 (a,b) 内存在. ③ $f(a)=f(b)=0$.

④ 在 (a,b) 中 $\exists c$ 使 $f(c)>0$.

求证：$\exists \xi \in (a,b)$ 使 $f''(\xi)<0$.

由 Lagrange，$\exists \xi_1 \in (a,c)$ 使 $f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\frac{f(c)}{c-a}>0$. ($f(c)>0$, $c-a>0$)

$\exists \xi_2 \in (c,b)$ 使 $f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=\frac{0-f(c)}{b-c}<0$ ($f(c)>0$, $b-c>0$)

再由 Lagrange，$\exists \xi \in (\xi_1,\xi_2)$，$f''(\xi)=\frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}$

$\because \xi_2-\xi_1>0$. $f'(\xi_2)-f'(\xi_1)<0$. $\Rightarrow f''(\xi)<0$

$\therefore \exists \xi \in (a,b)$ 使 $f''(\xi)<0$. □

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 17.

Date

$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 连续. 当 $x>a$ 时, $f'(x)>k>0$, 其中 k 为常数.

证明: 若 $f(a)<0$, 则 $f(x)=0$ 在 $[a, a-\frac{f(a)}{k}]$ 上有且仅有一个实根.

证: 由 Lagrange, $\exists \xi \in (a, a-\frac{f(a)}{k})$, $f'(\xi)=\frac{f[a-\frac{f(a)}{k}]-f(a)}{a-\frac{f(a)}{k}-a}$

即 $f[a-\frac{f(a)}{k}]=-f'(\xi)\cdot\frac{f(a)}{k}+f(a)$.

$\because \xi>a$

$\therefore f'(\xi)>k>0. \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{k}>1.$

$\therefore f[a-\frac{f(a)}{k}]=f(a)\cdot[1-\frac{f'(\xi)}{k}]>0$

又 $\because f(a)<0$.

$\therefore$ 由零点定理, $f(x)=0$ 在 $[a, a-\frac{f(a)}{k}]$ 上有根.

$\because f'(x)$ 在 $[a, a-\frac{f(a)}{k}]$ 上恒为正

$\therefore f(x)\uparrow$.

$\therefore f(x)=0$ 在 $[a, a-\frac{f(a)}{k}]$ 上仅一根.

设 f, g, h 在 $[a,b]$ 连续, (a,b) 可导. 证明在 (a,b) 中至少一点 ξ, 使

$$\begin{vmatrix} f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}=0. \quad (*)$$

证: 令 $\varphi(x)=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \end{vmatrix}$. $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, (a,b) 可导.

$\because \varphi(a)=\varphi(b)=0$.

$\therefore$ 由 Rolle, $\exists \varphi'(\xi)=0$ 即 $(*)$ 式. □

注意到, 当 $h(x)\equiv 1$, $g(x)=x$. $\Rightarrow$ Lagrange.

当 $h(x)\equiv 1$, $g'(x)\neq 0$. $\Rightarrow$ Cauchy.

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No

Date

第 $x_1x_2>0$. 试证在 x_1 与 x_2 间 $\exists \xi$ 使 $x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}=(1-\xi)e^{\xi}(x_1-x_2)$.

由 $x_1x_2>0 \Rightarrow x_1, x_2$ 同号.

$\therefore x_1, x_2$ 间不包含 $x=0$. (可应用 Cauchy).

构造: 令 $f(x)=\frac{e^x}{x}$. $g(x)=\frac{1}{x}$.

则 $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$ $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

由 Cauchy, $\exists \xi \in (x_1, x_2$ 间). 使 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_2)-g(x_1)}$

即: $\frac{\frac{e^{\xi}(\xi-1)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}=\frac{\frac{e^{x_2}}{x_2}-\frac{e^{x_1}}{x_1}}{\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}}$

$\Rightarrow e^{\xi}(1-\xi)=\frac{x_1e^{x_2}-x_2e^{x_1}}{x_1-x_2}$. □.

设 f 在 $x=0$ 邻近有 n 阶导. 且 $f(0)=f'(0)=f^{(2)}(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$.

试证: $\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}$. $0<\theta<1$.

左边: $\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x^n-0}$ 由 Cauchy, $\xi_1 \in (0,x)$. $\frac{f'(\xi_1)}{n\cdot\xi_1^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n\cdot\xi_1^{n-1}-0}$ 由 Cauchy, $\xi_2 \in (0,\xi_1)$. $\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}}$

递推 $=\cdots\cdots=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}=$ 右边. □.

Cauchy

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求: $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ $\frac{0}{0}$, 洛.

$$ys=\lim_{x\to a}\frac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}}=\frac{m}{n}a^{m-n}.$$

求: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x}$ $\frac{0}{0}$, 洛.

$$ys=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e^x+x}(e^x+1)}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x}=\frac{e^0+1}{e^0+0}=2$$

求: $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$.

$\frac{0}{0}$, 洛

$$ys=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan 2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}}=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{(1)^2}}=\frac{1}{2}.$$

求: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

$$ys=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}$$

$\frac{0}{0}$ 洛.

对指数: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\cos x\cdot x-\sin x}{x^2}}{2x}$ 替换 $\sin x\sim x$.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{6x^2}=-\frac{1}{6}$$

再洛

$\therefore ys=e^{-\frac{1}{6}}$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

求：$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(\tan x)^{2x-\pi}$.

$y=e^{\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(2x-\pi)\ln\tan x}$.

对指数：$\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\dfrac{\ln\tan x}{\frac{1}{2x-\pi}}$ $\xrightarrow{\frac{\infty}{\infty},\text{洛}}$ $=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\dfrac{\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{(2x-\pi)^2}}$

$=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\dfrac{-(2x-\pi)^2}{\tan x(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\dfrac{-4}{\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)+\tan x\cdot 2x}$

$=\dfrac{-4}{1+(+\infty)\cdot(\pi)^-}=0$. $\therefore y=e^0=1$.

求：$\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x$.

$y=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)}{\frac{1}{x}}}$ $\xleftarrow{\frac{0}{0},\text{洛}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2\arctan x}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{\arctan x\cdot(1+x^2)}}$

再洛 $=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{\frac{1}{1+x^2}(1+x^2)+2x\cdot\arctan x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2x}{1+2x\arctan x}}$

再洛 $=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-2}{2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}}}=e^{\frac{-2}{\pi+0}}=e^{-\frac{2}{\pi}}$.

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

$= 1 \cdot 0 = 0$.

$x\to 0$, $\sin\frac{1}{x}$ 有界.

求: $l = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{x\cos x}}{x\ln(1+x^2)}$.

$l = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\cos x}(e^{x-x\cos x}-1)}{x\cdot x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^0\cdot(x-x\cos x)}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$.

当 $x\to 0$ 时, 求无穷小量 $u = \left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^{x^2} - 1$ 的主部、阶数.

$u = e^{x^2 \ln\frac{2+\cos x}{3}} - 1 \sim x^2 \ln\frac{2+\cos x}{3} = x^2 \ln\left(1+\frac{\cos x - 1}{3}\right)$

$x^2 \ln\frac{2+\cos x}{3} \to 0$ $\qquad$ $\frac{\cos x - 1}{3} \to 0$

$\sim x^2 \cdot \frac{\cos x - 1}{3} \sim x^2 \cdot \frac{-\frac{1}{2}x^2}{3} = -\frac{1}{6}x^4$.

∴主部为 $-\frac{1}{6}x^4$. 阶数为 4.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

求 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\cos 3x}{e^x-1-x}$

洛 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}+3\sin 3x}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+3\sin 3x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{x}=-1+9=8.$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(a+b\sin x)}{\sin^2 x}$. 点 $x=0$ 为 $f(x)$ 的可去间断点. 求 a,b.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在. $\therefore$ 必为 $\frac{0}{0}$ 型 $\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(a+b\sin x)\right]=0$

$\Rightarrow 1-a=0\quad\therefore a=1.$

$\because\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(1+b\sin x)}{\sin^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}-(1+b\sin x)\right]\left[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}+(1+b\sin x)\right]}{x^2\left[\sqrt{1+\sin x+\sin^2 x}+(1+b\sin x)\right]}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x+\sin^2 x-1-2b\sin x-b^2\sin^2 x}{x^2[1+1]}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-2b)\sin x+(1-b^2)\sin^2 x}{x^2}$

$=\frac{1}{2}\left[(1-b^2)+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-2b)\sin x}{x^2}\right]$ 存在.

$\therefore\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-2b)\sin x}{x^2}$ 存在 $\Rightarrow$ 必为 $\frac{0}{0}$ 型 $\Rightarrow 1-2b=0$

$\hookrightarrow=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2b}{x}$

$\therefore b=\frac{1}{2}.$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 70.

Date

$f(x)=\begin{cases}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{\sin x}\ln(1+x^2)}-1}{x}$

$x^2\to 0,\ \ln(1+x^2)\sim x^2$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{x^2}{\sin x}}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{\sin x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1.$

$\dfrac{x^2}{\sin x}=\dfrac{x}{\sin x}\cdot x\to 0$ $e^t-1\sim t$

$\therefore f'(x)=\begin{cases}(1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}\cdot\dfrac{\frac{2x\sin x}{1+x^2}-\ln(1+x^2)\cdot\cos x}{\sin^2 x}, & (x\neq 0)\\ 1, & (x=0)\end{cases}$

对数求导法.

$f(x)=x^2\ln(1+x)$. 求 $f^{(6)}(0)$.

$f^{(6)}(x)=C_6^0\cdot(x^2)^{(0)}\cdot[\ln(1+x)]^{(6)}+C_6^1\cdot(x^2)^{(1)}\cdot[\ln(1+x)]^{(5)}+$

$C_6^2\cdot(x^2)^{(2)}\cdot[\ln(1+x)]^{(4)}+\cdots\cdots$ (全为0).

$[\ln(1+x)]^{(n)}=\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n-1)}=\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{(1+x)^n}$

$\therefore f^{(6)}(0)=0+0+C_6^2\cdot 2\cdot\dfrac{(-1)^3\cdot(4-1)!}{(1+0)^4}=-180.$

KOKUYO

No.

Date

讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$ 的连续性. a,b 为常数.

注意到 $n\to\infty$ 时 $e^{n(x-1)}$ 趋向不确定（由于指数正/负决定）.

因此讨论 $x=1$, $x>1$. $x<1$ 的情况.

① 当 $x=1$ 时, $f(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot e^0+a+b}{e^0+1}=\dfrac{a+b+1}{2}$

② 当 $x>1$ 时, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+\left(\frac{ax+b}{e^{n(x-1)}}\right)\to 0}{1+\left(\frac{1}{e^{n(x-1)}}\right)\to 0}=x^2$.

$e^{n(x-1)}\to+\infty$

③ 当 $x<1$ 时, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{\left(e^{n(x-1)}\right)+1}=ax+b$.

$\left(e^{n(x-1)}\right)\to 0$

$\therefore f(x)=\begin{cases}ax+b & (x<1)\\ \dfrac{a+b+1}{2} & (x=1)\\ x^2 & (x>1).\end{cases}$ $\Rightarrow f(x)$ 在 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 连续.

$\because f(1^+)=(1^+)^2=1$. $f(1^-)=a(1^-)+b=a+b$. $f(1)=\dfrac{a+b+1}{2}$.

$\therefore$ 当 $a+b=1$ 时, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)$. 有 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

否则不连续.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 21.

Date

数列$\{x_n\}$满足$x_1=1$，$x_n=x_{n-1}+\frac{1}{n^2}$ $(n\geq 2)$. 研究极限$\lim_{n\to\infty} x_n$的存在性

单调有界收敛原理!

① 单调性：由$x_n-x_{n-1}=\frac{1}{n^2}>0$

$\Rightarrow x_n>x_{n-1}$

$\therefore \{x_n\}$单调↑.

② 有界：$\because x_n=x_{n-1}+\frac{1}{n^2}=x_{n-2}+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}=\cdots=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

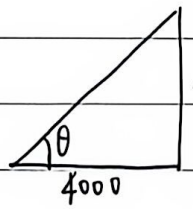
$\therefore$ 由$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$，

得$x_n<1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}=2-\frac{1}{n}<2$

x_n有上界.

由①、②，$\{x_n\}$收敛. 即$\lim_{n\to\infty} x_n$存在.

在距火箭发射塔4000米处安一台摄像机，为使摄像机的镜头指终对准火箭，摄像机的仰角θ随火箭的上升不断增加. 火箭发射后垂直上升到距离地面3000米处，速度为600米/s，求此时摄像机仰角θ的变化率.



在t时刻：$\tan\theta=\frac{x}{4000}$ (*).

要求：$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$.

由(*)式两边对t求导：$\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\theta'(t)=\frac{1}{4000}\cdot x'(t)$

即：$\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{4000}\cdot\frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt}=\frac{\cos^2\theta}{4000}\cdot\frac{dx}{dt}$.

$\because t$时刻，$v=\frac{dx}{dt}=600\ m/s$，$\cos\theta=\frac{4000}{5000}=\frac{4}{5}$.

$\therefore \frac{d\theta}{dt}=\frac{\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}}{4000}\cdot 600=\frac{12}{125}\ rad/s$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

设可微函数 $y=f(x)$ 由方程 $\underbrace{x^3+y^3+xy-1=0}_{(*)}$ 确定. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x-1)-1}{\ln(1+x^2)}$.

$\because x^2\to 0,\ \ln(1+x^2)\sim x^2$

$\therefore ys=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x-1)-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(0)-1}{x^2}$.

代入 $x=0\Rightarrow y=1$ 即 $f(0)=1$. $\therefore ys$ 为 $\frac{0}{0}$. 洛

$ys=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\cos x-1)\cdot(-\sin x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(\cos x-1)}{-2}=\dfrac{f'(0)}{-2}$.

($x\to 0,\ \sin x\sim x$)

对 $(*)$ 两边关于 x 求导:

$3x^2+3y^2\cdot y'+y+xy'=0\Rightarrow y'=-\dfrac{3x^2+y}{x+3y^2}$.

$\therefore f'(0)=-\dfrac{0+1}{0+3}=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore ys=\dfrac{-\frac{1}{3}}{-2}=\dfrac{1}{6}$.

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, $(0,1)$ 可导. 且 $f(0)=f(1)=0$. $f(\frac{1}{2})=1$.

证明: $\exists\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=1$.

$\Leftrightarrow$ 证 $f'(\xi)-1=0$. $\longrightarrow$ 构造 $F(x)=f(x)-x$. $F'(x)=f'(x)-1$.

$\because F(0)=f(0)-0=0$. $F(1)=f(1)-1=-1$. $F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 由零点定理, $\exists c\in(\frac{1}{2},1)$ 使 $F(c)=0$.

$\therefore$ 由 Rolle, $\exists\xi\in(0,c)\subset(0,1)$ 使 $F'(\xi)=0$ 即 $f'(\xi)-1=0$

即 $f'(\xi)=1$. 口.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 22

Date

求 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{x}}{x-\sin x}$.　$\tan x - x \to 0$, $e^{\tan x - x}-1 \sim (\tan x - x)$.

$e^{x}=1\ (x\to 0)$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}(e^{\tan x-x}-1)}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$$

↑ $\frac{0}{0}$, 洛

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{2}x^2}$$

↑ $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2.$$

求 $L=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$$L=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\arcsin x}{x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\arcsin x}{x}-1+1\right)}{x^2}}$$

← $t\to 0$, $\ln(t+1)\sim t$.

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\arcsin x}{x}-1}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-x}{x^3}}$$

↑ $\frac{0}{0}$, 洛

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}{3x^2}}$$ 再洛.

$$=e^{\lim_{x\to 0}\frac{x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6}}=e^{\frac{1}{6}}.$$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$f(x)=\frac{x-x^2}{\sin \pi x}$. 指出 $f(x)$ 的间断点及其类型.

间断点: $x=k$, $k\in\mathbb{Z}$.

当分子=0 即 $x=0$ 或 1 时, $f(x)$ 为 $\frac{0}{0}$ 型, 研究其 lim:

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1-x)}{\pi x}=\frac{1}{\pi}$. ∴ $x=0$ 为可去间断点.

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(1-x)}{\sin \pi x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{\sin \pi x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{\pi\cos \pi x}=\frac{1}{\pi}$.

∴ $x=1$ 为可去间断点.

当 $x=k$, $k\in\mathbb{Z}$ 且 $x\neq 0$ 或 1 时, $\lim\limits_{x\to k} f(x)=\infty$.

∴ 其余皆为无穷间断点.

分子. $x-x^2\neq 0$.

分母 $\to 0$.

$f(x)=\begin{cases} a+x+\sqrt{1-x}, & x<0. \\ 1+b\arctan x, & x\geq 0. \end{cases}$ 求 a,b, 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导.

$f(x)$ 在 $x=0$ 可导 $\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 即 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$.

∴ $\lim\limits_{x\to 0^-}(a+x+\sqrt{1-x})=1 \Rightarrow a+0+1=1$ ∴ $a=0$.

∵ $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1+b\arctan x-1}{x-0}=b$.

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1+x+\sqrt{1-x}-1}{x-0}=\frac{1}{2}$ (洛).

且 $f'_+(0)=f'_-(0)$

∴ $b=\frac{1}{2}$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No 23

Date

$y=\frac{1}{2-3x-2x^2}$，求 $y^{(n)}(0)$.

$y=-\frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{2x-1}=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)$.

$\therefore y=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)$. $y^{(n)}=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{1}{x+2}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)^{(n)}\right]$

$\Rightarrow y^{(n)}=\frac{1}{5}\cdot\left[\frac{n!\cdot(-1)^n}{(x+2)^{n+1}}-\frac{n!\cdot(-1)^n}{(x-\frac{1}{2})^{n+1}}\right]$

$\therefore y^{(n)}(0)=\frac{1}{5}\cdot\left[\frac{n!(-1)^n}{2^{n+1}}-\frac{n!(-1)^n}{(-\frac{1}{2})^{n+1}}\right]$

$=\frac{n!}{5}\left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}+2^{n+1}\right]$

设 $y=g(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数. $f(x)=x+(1+x)^x$. 求 $y=g(2+x^2)$ 在 $x=1$ 的导数.

要求：$y'=g'(2+x^2)\cdot 2x \Rightarrow y'|_{x=1}=g'(3)\cdot 2$.

$\because f(1)=1+2^1=3$. $f'(x)=1+(1+x)^x\cdot\left[\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right]\Rightarrow f'(1)=2\ln 2+2$

$\therefore g'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{2\ln 2+2}$

$\therefore y'|_{x=1}=\frac{1}{\ln 2+1}$

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$ 其中 $g(x)$ 在 R 上有一阶连续的导数，且 $g''(0)$ 存在，$g(0)=1$，$g'(0)=-1$，求 $f'(x)$，讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性。

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{g(x)-e^{-x}}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-e^{-x}}{x^2}\leftarrow\frac{0}{0},\text{洛}.$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{2x}\ (\text{再洛})=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}[g''(0)-1].$$

当 $x\neq 0$，$f'(x)=\dfrac{[g'(x)+e^{-x}]x-[g(x)-e^{-x}]}{x^2}$

$$\because \lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)+xe^{-x}-g(x)+e^{-x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)+xe^{-x}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-g(x)}{x^2}\ \swarrow\frac{0}{0},\text{洛}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+e^{-x}}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}-g'(x)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{g'(x)+e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{g''(x)-e^{-x}}{1}$$

$$=\frac{1}{2}[g''(0)-1].\quad =f'(0).$$

$\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

$f(x)$ 在 (a,b) 连续. 且 $x_i \in (a,b)$. $i=1,2,\cdots,n$. 证明: 至少存一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]$.

证: 不妨设 $a<x_1\le x_2\le\cdots\le x_n<b$.

显然, $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 连续. 则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上有 min, max.

$\Rightarrow \min \le f(x) \le \max$, $x\in[x_1,x_n]$

$\therefore \min \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le \max$.

又由介值定理, 存在 $\xi \in (x_1,x_n)\subset(a,b)$, 使 $f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.

$\therefore$ 命题得证. □.

求 $l=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

$$l=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}.$$

求当 $x\to0$ 时, 无穷小量 $x-\arctan x$ 的主部与阶数.

设主部为 cx^k.

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=c \Rightarrow \text{左边}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{cx^{k-1}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{(1+x^2)kx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{kx^{k-1}}=c. \quad \therefore \begin{cases} k-1=2 \\ \frac{1}{k}=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ c=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$\therefore$ 主部为 $\frac{1}{3}x^3$. 阶数 3.

KOKUYO
CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

设 $b=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+a\cos x-2}{\tan x}$ 为常数. 求 a,b.

左边为 $\frac{0}{0}$ 型. $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(x+a\cos x-2)=0$ 即 $0+a-2=0$ $\therefore a=2$.

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{x+2\cos x-2}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin x}{\frac{1}{\cos^2 x}}=1.$$

$f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$. 求 $f(x)$ 的间断点及其类型.

间断点: $x=0$, $x=1$.

$$\because \lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{1-x}\sin x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{\sin x}}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{-x\cos x}=\lim_{x\to 0}(-x)=0.$$

$\therefore x=0$ 为可去!!!.

$$\because \lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\sin x\cdot\frac{\ln|x|}{|x-1|}$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln|x|}{x-1}=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln(|x|-1+1)}{x-1}$$

$$=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{|x|-1}{x-1}=\sin 1.$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\sin 1\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\ln|x|}{1-x}=-\sin 1.$$

$\therefore x=1$ 为跳跃!!!.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

研究 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$ 的连续性.

当 x 正负不同，e^{nx} 极限不同. 故讨论 $x=0$. $x>0$. $x<0$.

①. 当 $x=0$. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2\cdot e^0}{1+e^0}=0$.

②. 当 $x>0$. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{x}{e^{nx}}+x^2}{\frac{1}{e^{nx}}+1}=x^2$.

③. 当 $x<0$. $f(x)=x$.

$$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ x & (x<0)\end{cases}$$

$\because \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=0$

$\therefore f(x)$ 在 R 上连续.

设 $x_n>0$. $\underbrace{x_{n+1}+\frac{4}{x_n}\le 4}_{(*)}$ $(n=1,2,\cdots)$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其值.

$\because x_{n+1}\le 4-\frac{4}{x_n}$

$\therefore x_{n+1}-x_n\le 4-\frac{4}{x_n}-x_n=\frac{(x_n-2)^2}{-x_n}\le 0$

$\therefore x_{n+1}\le x_n$. $\Rightarrow \{x_n\}$ 单减.

又 $\because x_n>0$ 有下界.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设其为 A. 有 $A>0$ (保号性)

对 $(*)$ 两边取极限：$A+\frac{4}{A}\le 4\Rightarrow (A-2)^2\le 0$.

$\therefore A=2$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

f(x)在[0,b]有二阶导. $|f''(x)| \le M$. f(x)在(0,b)上取得最大值.

求证: $|f'(0)|+|f'(b)| \le Mb$.

记 $f(x)_{max} = f(x_0)$. $x_0 \in (0,b)$.

由Fermat定理, $f'(x_0)=0$.

对 $f'(x)$: 由Lagrange: $\exists \xi_1 \in (0,x_0)$ 使 $\frac{f'(x_0)-f'(0)}{x_0-0} = f''(\xi_1)$.

$\exists \xi_2 \in (x_0,b)$ 使 $\frac{f'(b)-f'(x_0)}{b-x_0} = f''(\xi_2)$.

即: $f'(0) = -x_0 f''(\xi_1)$. $\xi_1 \in (0,x_0)$

$f'(b) = (b-x_0) f''(\xi_2)$. $\xi_2 \in (x_0,b)$.

则 $|f'(0)|+|f'(b)| = x_0|f''(\xi_1)| + (b-x_0)|f''(\xi_2)|$

$\le x_0 \cdot M + (b-x_0)\cdot M = Mb$. 口.

求: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$

由Taylor: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.

$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 + (-\frac{x^2}{2}) + \frac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)$.

$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

$\therefore$ 原式 $= \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)}{x^3 - x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^4}{12} + o(x^4)}{-\frac{x^4}{2} + o(x^4)}$

$= \frac{1}{6}$.

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date: 26.

Date

求: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{3\sin x-\sin 3x}\cdot \sin x.$

$$y_5=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\frac{1}{4}\sin 4x\cos 3x}{3\sin x-\sin 3x}.$$

由 Taylor. $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3).$

$$\sin 4x = 4x-\frac{32x^3}{3}+o(x^3)$$

$$\cos 3x = 1-\frac{9x^2}{2}+o(x^2).$$

$$\sin 3x = 3x-\frac{9x^3}{2}+o(x^3).$$

$$\therefore y_5=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-\frac{1}{4}\left[4x-\frac{32x^3}{3}+o(x^3)\right]\left[1-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)\right]}{3x-\frac{x^3}{2}+o(x^3)-3x+\frac{9x^3}{2}-o(x^3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)-x+\frac{9x^3}{2}-o(x^3)+\frac{8x^3}{3}-12x^5}{4x^3+o(x^3)}$$ (忽略所有高阶无穷小)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{6}+\frac{9x^3}{2}+\frac{8x^3}{3}+o(x^3)}{4x^3+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{7x^3+o(x^3)}{4x^3+o(x^3)}$$

$$=\frac{7}{4}.$$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$. $f''(x)>0$. 证明: $f(x)\geq x$.

↳ $\frac{0}{0}$ 型. $\therefore f(0)=0.$ $\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1.$

$\because f(x)=\frac{f^{(0)}(0)}{0!}\cdot x^0+\frac{f'(0)}{1!}\cdot x^1+\frac{f''(\xi)}{2!}\cdot x^2$. 其中 ξ 介于 0, x 之间

$$=0+x+\frac{f''(\xi)}{2}\cdot x^2 \quad \text{且 } f''(\xi)>0,\ x^2\geq 0$$

$\therefore f(x)-x\geq 0 \Rightarrow f(x)\geq x.$ □.

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

对 $x>0, y>0, x\neq y, n>1$. 证明: $\frac{1}{2}(x^n+y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$.

考虑将双变量 → 单变量.

令 $t=\frac{x}{y}>0$. $t\neq 1$.

则 $\Leftrightarrow$ 证 $\frac{\frac{1}{2}(x^n+y^n)}{y^n} > \frac{\left(\frac{x+y}{2}\right)^n}{y^n}$ $\Leftrightarrow$ 证 $\frac{1}{2}(t^n+1) > \left(\frac{t+1}{2}\right)^n$

令 $f(t)=\frac{1}{2}(t^n+1)-\left(\frac{t+1}{2}\right)^n$ $f'(t)=\frac{1}{2}n\cdot t^{n-1}-\frac{1}{2}n\cdot\left(\frac{1}{2}t\right)^{n-1}$

$=\frac{1}{2}n\cdot t^{n-1}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]>0$.

$\therefore f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ ↑.

$\because \lim_{t\to 0} f(t)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^n>0$.

$\therefore f(t)>0$ 即 $\frac{1}{2}(t^n+1)>\left(\frac{t+1}{2}\right)^n$. □.

求曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线.

定 $x\neq 0$.

①. $\lim_{x\to 0} y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}+\lim_{x\to 0}\ln(1+e^x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}+\ln 2=\infty$ $\therefore l_1: x=0$.

②. $\lim_{x\to -\infty} y=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to -\infty}\ln(1+e^x)=0+0=0$. $\therefore l_2: y=0$.

③. $\lim_{x\to +\infty} y=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}+\ln e^x(e^{-x}+1)=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}+\ln e^x+\ln(e^{-x}+1)=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}+x+\ln(e^{-x}+1)$

$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to +\infty}x+\lim_{x\to +\infty}\ln(e^{-x}+1)=0+\lim_{x\to +\infty}x+0=\lim_{x\to +\infty}x$.

$\therefore l_3: y=x$.

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求: $\int e^{e^x+x}\,dx$.

$ys=\int e^{e^x}\cdot e^x dx=\int e^{e^x}\cdot d(e^x)$ 令 $u=e^x$.

$=\int e^u du=e^u+C=e^{e^x}+C$.

求 $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$. $a>0$.

由 $\sec^2x-1=\tan^2x$ $\left(\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\cos^2x}-\frac{\cos^2x}{\cos^2x}=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}\right)$.

令 $x=a\sec t$. 则 $x^2-a^2=a^2(\sec^2t-1)=a^2\tan^2t$.

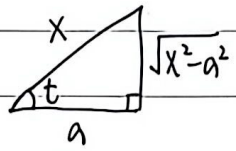
$dx=a\,d\sec t=a\frac{\sin t}{\cos^2t}dt$.

$\therefore ys=\int\frac{a\tan t}{a\sec t}\cdot a\frac{\sin t}{\cos^2t}dt=\int\frac{\frac{\sin t}{\cos t}}{\frac{1}{\cos t}}\cdot a\frac{\sin t}{\cos^2t}dt$

$=\int a\cdot\frac{\sin^2t}{\cos^2t}dt=a\int\frac{1-\cos^2t}{\cos^2t}dt=a\int\left(\frac{1}{\cos^2t}-1\right)dt$

$=a(\tan t-t)+C$.

$\because\frac{1}{\cos t}=\frac{x}{a}\Rightarrow\cos t=\frac{a}{x}$ 即:



$\therefore t=\arctan\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ $\tan t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$

$\therefore ys=\sqrt{x^2-a^2}-a\cdot\arctan\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}+C$.

$\arctan\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$ ↑ $\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求 $\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}dx$. $a>0$.

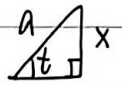
由 $1-\sin^2 x=\cos^2 x$，令 $x=a\sin t$. 则 $a^2-x^2=a^2(1-\sin^2 t)=a^2\cos^2 t$.

$dx=a\cos t\,dt$.

$$ys=\int \frac{1}{a\sin t\cdot a\cos t}\cdot a\cos t\,dt=\int \frac{1}{a\sin t}dt=\frac{1}{a}\int \frac{1}{\sin t}dt$$

$$=\frac{1}{a}\ln|\csc t-\cot t|+C$$

$\because \sin t=\frac{x}{a}\Rightarrow$



$$\therefore ys=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{x}-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C.$$

☆

求 $\int \frac{1}{x^8(1+x^2)}dx$.

令 $t=\frac{1}{x}$. $\Rightarrow x=\frac{1}{t}$. $dx=-\frac{1}{t^2}dt$.

$$ys=\int t^8\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\int \frac{-t^6}{1+t^2}dt=-\int \frac{t^8}{t^2+1}dt$$

$$=-\int \frac{t^8-1+1}{t^2+1}dt=-\int \frac{(t^4+1)(t^2+1)(t^2-1)+1}{t^2+1}dt=-\int\left[(t^4+1)(t^2-1)+\frac{1}{t^2+1}\right]dt$$

$$=-\int(t^6-t^4+t^2-1)dt-\int\frac{1}{1+t^2}dt=-\frac{1}{7}t^7+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3+t-\arctan t+C$$

$$=-\frac{1}{7x^7}+\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}+C.$$

令 $u=\cos t$

$$\int\frac{1}{\sin t}dt=\int\frac{\sin t\,dt}{\sin^2 t}$$

$$=\int\frac{-d\cos t}{1-\cos^2 t}=-\int\frac{1}{1-u^2}du$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)du$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|1-u|-\frac{1}{2}\ln|1+u|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right|+C$$

$$=\ln\left|\frac{1-\cos t}{\sin t}\right|+C$$

$$=\ln|\csc t-\cot t|+C$$

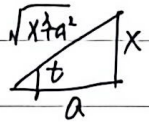
Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求: $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$. $a>0$.

由 $\tan^2x+1=\sec^2x$ $\left(\frac{\sin^2x}{\cos^2x}+\frac{\cos^2x}{\cos^2x}=\frac{1}{\cos^2x}\right)$

令 $x=a\tan t$. 则 $x^2+a^2=a^2(\tan^2t+1)=a^2\sec^2t$.



$dx=a\frac{1}{\cos^2t}dt$.

$$ys=\int \frac{a^2\tan^2t}{a\sec t}\cdot a\frac{1}{\cos^2t}dt=\int \frac{a^2\frac{\sin^2t}{\cos^2t}}{\frac{1}{\cos t}}\cdot\frac{1}{\cos^2t}dt$$

$$=a^2\int\frac{\sin^2t}{\cos^3t}dt=a^2\int\frac{1-\cos^2t}{\cos^3t}dt=a^2\int\frac{1}{\cos^3t}dt-a^2\int\frac{1}{\cos t}dt$$

$$=a^2\int\frac{\sin^2t\cos t}{\cos^4t}dt=a^2\int\frac{\sin^2t\,d(\sin t)}{(1-\sin^2t)^2}$$ 令 $u=\sin t$

$$=a^2\int\frac{u^2du}{(1-u^2)^2}=a^2\int\frac{u^2du}{(1+u)^2(1-u)^2}$$

$+A+B+C+D$

$(A+2B-C-2D)u$ ↑

设 $\frac{u^2}{(1-u^2)^2}=\frac{A}{1-u}+\frac{B}{(1-u)^2}+\frac{C}{1+u}+\frac{D}{(1+u)^2}=\frac{(C-A)u^3+(-A+B-C+D)u^2+}{(1-u^2)^2}$ ↑

$\Rightarrow A=-\frac{1}{4}$. $B=\frac{1}{4}$ $C=-\frac{1}{4}$ $D=\frac{1}{4}$

$$\therefore ys=\frac{a^2}{4}\int\left[\frac{-1}{1-u}+\frac{1}{(1-u)^2}+\frac{-1}{1+u}+\frac{1}{(1+u)^2}\right]du$$

$$=\frac{a^2}{4}\left[\ln|1-u|-\ln|1+u|+\int\frac{1}{(1-u)^2}du+\int\frac{1}{(1+u)^2}du\right]+C$$

$$=\frac{a^2}{4}\left[\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|+\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}\right]+C.$$

$$=\frac{a^2}{4}\left[\ln\left|\frac{1-\sin t}{1+\sin t}\right|+\frac{2\sin t}{\cos^2t}\right]+C=\frac{a^2}{2}\left[\ln\frac{1-\sin t}{\cos t}+\frac{\sin t}{\cos^2t}\right]+C.$$

$$=\frac{a^2}{2}\left[\ln(\sqrt{x^2+a^2}-x)-\ln a+\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{a^2}\right]+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\ln(\sqrt{x^2+a^2}-x)+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+C$$

← 把 $\frac{a^2}{2}\cdot\ln a$ 并入常数项.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

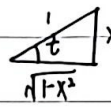
Date

求: $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$.

$ys = \int -\arcsin x \, d(\frac{1}{x}) = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{1}{x} d\arcsin x = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

? 看到 $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ 形式, 三角代换.

令 $x = \sin t$. $1-x^2 = 1-\sin^2 t = \cos^2 t$. $dx = \cos t \, dt$



$\therefore ys = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{\cos t \, dt}{\sin t \cos t} = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{1}{\sin t} dt$

↑代公式!.

$= -\frac{\arcsin x}{x} + \ln|\csc t - \cot t| + C$.

$= -\frac{\arcsin x}{x} + \ln\left|\frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C$

求: $\int (1-\frac{2}{x})^2 \cdot e^x dx$.

$ys = \int (1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}) e^x dx = \int e^x dx - \int \frac{4}{x} d(e^x) + \int \frac{4}{x^2} e^x dx$

$= e^x - \frac{4}{x} e^x + \int e^x \cdot d\frac{4}{x} + \int \frac{4}{x^2} e^x dx$

$= e^x - \frac{4}{x} e^x - \int e^x \cdot \frac{4}{x^2} dx + \int \frac{4}{x^2} e^x dx = e^x - \frac{4}{x} e^x + C$.

求: $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$

$ys = \int x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$ ← $d\frac{1}{1+x^2} = \frac{-1}{(1+x^2)^2} \cdot 2x$

$\therefore \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} d\frac{1}{1+x^2}$

$= -\frac{1}{2} \int x \cdot d\frac{1}{1+x^2}$

$= -\frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+x^2} - \int \frac{1}{1+x^2} dx\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+x^2} - \arctan x\right] + C$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

Date

求: $\int e^x \frac{1+\sin x}{1+\cos x} dx$

$$y_S = \int e^x \frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} dx = \int e^x \cdot \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} dx + \int e^x \tan\frac{x}{2} dx$$

$$= \int e^x \cdot d\tan\frac{x}{2} + \int \tan\frac{x}{2} de^x = e^x \tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2} de^x + \int \tan\frac{x}{2} de^x$$

$$= e^x \tan\frac{x}{2} + C.$$

求: $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx$ $\left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ ① 负号, 丢掉!!!

$$y_S = -2\int \arcsin x \, d\sqrt{1-x} = -2\left[\arcsin x \cdot \sqrt{1-x} - \int \sqrt{1-x} \, d\arcsin x\right]$$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin x + 2\int \sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin x + 2\int \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = -2\sqrt{1-x}\arcsin x + 4\sqrt{1+x} + C.$$

求 $I_n = \int \tan^n x \, dx$ 的递推公式 $(n \geq 2)$.

$$I_n = \int \tan^{n-2} x (\underbrace{\sec^2 x - 1}_{\sec^2 x - 1 = \tan^2 x}) dx = \int \tan^{n-2} x \sec^2 x \, dx - \int \tan^{n-2} x \, dx$$

$$I_n = \int \tan^{n-2} x \, d\tan x - I_{n-2}$$

令 $u = \tan x$. 则 $I_n = \int u^{n-2} du - I_{n-2} = \frac{1}{n-1} u^{n-1} - I_{n-2}$

$\therefore I_n = \frac{1}{n-1} \cdot \tan^{n-1} x - I_{n-2}$. $(n \geq 2)$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

设 $f(x)$ 的原函数是 $\frac{\sin x}{x}$，求 $\int x f(x)\,dx$.

$$\int x f(x)\,dx = \int x\,df(x) = x\cdot f(x) - \int f(x)\,dx = x f(x) - F(x) + C.$$

$\because F(x) = \frac{\sin x}{x}$　$f(x) = F'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$

$\therefore ys = \frac{x\cos x - \sin x}{x} - \frac{\sin x}{x} + C = \cos x - \frac{2\sin x}{x} + C.$

求：$\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx.$

令 $t = 1-x$，则 $x = 1-t$，$dx = -dt$.

$$ys = \int \frac{(1-t)^2\cdot(-dt)}{t^{100}} = -\int \frac{1-2t+t^2}{t^{100}}\,dt$$

$$= -\int t^{-100}\,dt + 2\int t^{-99}\,dt - \int t^{-98}\,dt$$

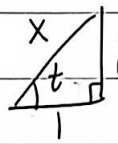
$$= \frac{1}{99}t^{-99} - \frac{1}{98}t^{-98} + \frac{1}{97}t^{-97} + C.$$

$$= \frac{1}{99}(1-x)^{-99} - \frac{1}{98}(1-x)^{-98} + \frac{1}{97}(1-x)^{-97} + C.$$

求：$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx.$

令 $x = \sec t$，则 $dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$.

$$ys = \int \frac{1}{\sec t\cdot\tan t}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \int dt = t + C$$

$\because$ 

$\therefore t = \arccos\frac{1}{x}.$

$\therefore ys = \arccos\frac{1}{x} + C.$

Campus
扫描全能王
3亿人都在用的扫描App

求：$\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)}dx$.

令 $u=xe^x$. $du=(e^x+xe^x)dx=e^x(x+1)dx$.

$$\text{原式}=\int \frac{e^x(1+x)}{xe^x(1+xe^x)}dx=\int \frac{du}{u(1+u)}=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du$$

$$=\int\frac{1}{u}du-\int\frac{1}{1+u}du=\ln|u|-\ln|1+u|+C$$

$$=\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|+C.$$

求：$\int \frac{x^7}{\sqrt{1+x^4}}dx$.

令 $t=1+x^4$. $dt=4x^3dx$.

$$\text{原式}=\int\frac{\frac{1}{4}x^4\cdot 4x^3dx}{\sqrt{t}}=\int\frac{\frac{1}{4}(t-1)\cdot dt}{\sqrt{t}}$$

$$=\frac{1}{4}\int t^{\frac{1}{2}}dt-\frac{1}{4}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{6}t^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{6}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}+C.$$

求：$\int x\arcsin x\,dx$

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int \arcsin x\,dx^2=\frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{2}\int x^2\,d\arcsin x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad \text{令 } x=\sin t.\ \text{则 } t=\arcsin x.$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{2}\int\frac{\sin^2t\cdot\cos t\cdot dt}{\cos t}$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{2}\int\sin^2t\,dt.$$

$$\int\sin^2t\,dt=\int\frac{1-\cos 2t}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t+C$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C.$$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求：$\int x^2\ln(1+x)\,dx$.

$y_5=\frac{1}{3}\int\ln(1+x)\,dx^3=\frac{1}{3}x^3\ln(1+x)-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x}\,dx$

$\because\ \frac{x^3}{1+x}=\frac{(1+x)(x^2-x+1)-1}{1+x}$

$\therefore\ \int\frac{x^3}{1+x}\,dx=\int\left[(x^2-x+1)-\frac{1}{1+x}\right]dx$

$\therefore\ y_5=\frac{1}{3}x^3\ln(1+x)+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\ln|1+x|+C$.

求：$\int\frac{x\sin x}{\cos^3 x}\,dx$.

$y_5=\int x\cdot\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\int x\cdot\tan x\cdot d\tan x$

令 $u=\tan x$. 则 $x=\arctan u$.

$y_5=\int\arctan u\cdot\frac{1}{2}du^2=\frac{1}{2}u^2\arctan u-\frac{1}{2}\int u^2\,d\arctan u$

$=\frac{1}{2}u^2\arctan u-\frac{1}{2}\int\frac{u^2+1-1}{1+u^2}\,du$

$=\frac{1}{2}u^2\arctan u-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)du$

$=\frac{1}{2}u^2\arctan u-\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}\arctan u+C$.

$=\frac{x}{2}\tan^2 x-\frac{1}{2}\tan x+\frac{1}{2}x+C$

$=\frac{x}{2}\sec^2 x-\frac{1}{2}\tan x+C$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求：$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

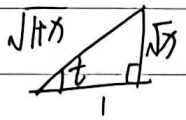
令 $u=\sqrt{x}$. 则 $x=u^2$. $dx=2u\,du$.

$$y=\int \frac{\arctan u}{\sqrt{1+u^2}}\cdot 2u\,du \quad \leftarrow \quad d\sqrt{1+u^2}=\frac{2u}{2\sqrt{1+u^2}}du=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}du$$

$$=2\int \arctan u\cdot d\sqrt{1+u^2}$$

$$=2\sqrt{1+u^2}\cdot\arctan u-2\int\sqrt{1+u^2}\cdot\frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$=2\sqrt{1+x}\cdot\arctan\sqrt{x}-2\int\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du. \quad \leftarrow$$



三角代换. 令 $u=\tan t$.

$du=\sec^2 t\,dt$.

$$=2\sqrt{1+x}\cdot\arctan\sqrt{x}-2\cdot\int\frac{\sec^2 t\,dt}{\sec t}$$

$$=2\sqrt{1+x}\cdot\arctan\sqrt{x}-2\cdot\int\frac{\cos t\,dt}{\cos^2 t}$$

$$\int\frac{d\sin t}{1-\sin^2 t}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-\sin t}+\frac{1}{1+\sin t}\right)d\sin t$$

$$=\frac{1}{2}\ln|1+\sin t|-\frac{1}{2}\ln|1-\sin t|$$

$$=2\sqrt{1+x}\cdot\arctan\sqrt{x}-\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+C.$$

$$=2\sqrt{1+x}\cdot\arctan\sqrt{x}-\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}}{1-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}}\right|+C$$

$$=2\sqrt{1+x}\cdot\arctan\sqrt{x}-\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}\right|+C$$

$$=2\sqrt{1+x}\cdot\arctan\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right|+C.$$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求: $\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx$.

$\because \frac{1+\sin x}{1+\cos x} = \frac{1}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}$

$= \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}$

$\therefore y = \int e^x\left(\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2}\right)dx$

$= \frac{1}{2}\int e^x\sec^2\frac{x}{2}dx + \int \tan\frac{x}{2}de^x$

$= \frac{1}{2}\int e^x\sec^2\frac{x}{2}dx + e^x\tan\frac{x}{2} - \int e^x\cdot d\tan\frac{x}{2}$

$= \int e^x\cdot\sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}dx$

$= e^x\tan\frac{x}{2} + C.$

求: $\int \frac{1}{(2x+1)\sqrt{x^2+1}}dx$. → 考虑三角换元 β.

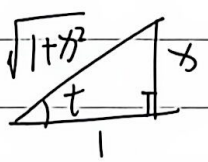
令 $x=\tan t$. 则 $dx = \sec^2 t\,dt$.

$y = \int \frac{1}{(2\tan^2 t+2-1)\cdot\sec t}\cdot\sec^2 t\cdot dt$

$= \int \frac{\sec t\cdot dt}{2\sec^2 t-1} = \int \frac{\cos t}{2-\cos^2 t}dt = \int \frac{d\sin t}{1+\sin^2 t}$

$= \arctan(\sin t) + C$

$= \arctan\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.$



求 $\int \frac{1}{2\sin x+3\cos x}dx$

$y_5=\int \frac{1}{\sqrt{13}\sin(x+\varphi)}d(x+\varphi)$ ← 辅助角公式：

$2\sin x+3\cos x=\sqrt{13}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\sin x+\frac{3}{\sqrt{13}}\cos x\right)$

$=\sqrt{13}\sin(x+\varphi)$.

其中 $\sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{13}}$. $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{13}}$

$\therefore \varphi=\arctan\frac{3}{2}$.

令 $t=x+\varphi$. $dt=dx$

$\therefore y_5=\int \frac{1}{\sqrt{13}\sin t}dt$

$=\frac{1}{\sqrt{13}}\cdot\int\frac{\sin t\,dt}{1-\cos^2 t}$

$=-\frac{1}{\sqrt{13}}\cdot\int\frac{d\cos t}{1-\cos^2 t}$ 令 $u=\cos t$.

$=-\frac{1}{\sqrt{13}}\cdot\int\frac{du}{(1+u)(1-u)}=-\frac{1}{\sqrt{13}}\cdot\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du$

$=-\frac{1}{2\sqrt{13}}\left[\int\frac{1}{1+u}du+\int\frac{1}{1-u}du\right]+C$

$=-\frac{1}{2\sqrt{13}}\left[\ln|1+u|-\ln|1-u|\right]+C=-\frac{1}{2\sqrt{13}}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+C$

$=-\frac{1}{2\sqrt{13}}\ln\left|\frac{1+\cos(x+\varphi)}{1-\cos(x+\varphi)}\right|+C$. $\varphi=\arctan\frac{3}{2}$.

比较：$\int_0^1\frac{x}{1+x}dx$. $\int_0^1\ln(1+x)dx$.

左边 $=\int_0^1\frac{1+x-1}{1+x}dx=\int_0^1 1\cdot dx-\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=1-\ln|1+x|\Big|_0^1=1-\ln 2$.

右边 $=x\ln|1+x|\Big|_0^1-\int_0^1 x\,d\ln(1+x)=\ln 2-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\ln 2-(1-\ln 2)$

$=2\ln 2-1$

$\therefore$ 左边 − 右边 $=1-\ln 2-2\ln 2+1=2-3\ln 2<0$

$(\ln 2\approx 0.69)$.

$\therefore$ 左边 < 右边

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}dx=0$.

由于存在 $\sin x$ 这类有界 & 正负不定的函数，考虑加绝对值.

$\because x\in[n,n+1]$

$\therefore \left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|\le\frac{1}{n}$ ← 核心：放缩.

$\because \left|\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}dx\right|\le\int_n^{n+1}\left|\frac{\sin x}{n}\right|dx\le\int_n^{n+1}\frac{1}{n}dx=\frac{x}{n}\Big|_n^{n+1}=\frac{1}{n}$

$\therefore -\frac{1}{n}\le\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{1}{n}$

由夹逼定理，$\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{1}{n}\le\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}dx\le\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}$

($\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{1}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$)

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\frac{\sin x}{x}dx=0.$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x}dx=0$

$\because 0\le\frac{x^n}{1+x}\le\frac{x^n}{1}=x^n$

$\therefore 0\le\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^n}{1+x}dx\le\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}x^n dx$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{1}{2}}x^n dx=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}=0$

$\therefore$ 由夹逼定理，$ys=0$.

求: $\frac{d}{dx}\int_0^{2x} t f(x^2+t^2)\,dt$.

令 $u=x^2+t^2$. 则 $du=2t\,dt$.

当 $t: 0\to 2x$

$u: x^2\to 5x^2$.

$\therefore$ 原式 $=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{5x^2}\frac{1}{2}f(u)\,du = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{5x^2} f(u)\,du$.

$=\frac{1}{2}\left[f(5x^2)\cdot 10x - f(x^2)\cdot 2x\right]$

$=5x f(5x^2) - x f(x^2)$.

设函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^3}\int_0^x \arctan t^2\,dt, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点连续. 求 a.

"在 $x=0$ 点连续" $\Leftrightarrow a=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \arctan t^2\,dt$ (*)

Taylor 展开 $\arctan t^2 = t^2-\frac{1}{3}t^6+o(t^6)$

$\therefore$ (*)式 $=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\int_0^x t^2\,dt-\frac{1}{3}\int_0^x t^6\,dt+o(t^7)\right]$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{21}x^7+o(t^7)\right]=\frac{1}{3}$.

$\therefore a=\frac{1}{3}$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

设方程 $\int_1^y \frac{\sin t}{t}dt + \int_{\frac{1}{x}}^1 e^{-t^2}dt = 0$ 右确定 $y=y(x)$. 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

记 $F(y) = \int_1^y \frac{\sin t}{t}dt$. 则有 $F(y) = -\int_{\frac{1}{y}}^1 e^{-t^2}dt$

两边对 x 求导:

$$\text{左边} = F'(y)\cdot y' = F'(y)\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt}\int_1^y \frac{\sin t}{t}dt\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

$$\text{右边} = -\frac{d}{dx}\int_{\frac{1}{x}}^1 e^{-t^2}dt = \frac{d}{dx}\int_1^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}dt = e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

$$\because \frac{\sin y}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2\sin y}$$

且当 $x=1$ 时, 由 $\int_1^y \frac{\sin t}{t}dt = -\int_1^1 e^{-t^2}dt = 0 \Rightarrow y=1$.

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1,\,y=1} = \frac{-1\cdot e^{-1}}{1\cdot\sin 1} = \frac{-1}{e\sin 1}$$

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt}{x^b} = $ ____, 故当 $x\to 0$ 时, $\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt$ 是 x 的 ____ 阶无穷小.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt}{x^b} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\left(t^2-\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{3}t^6+o(t^6)\right)dt}{x^b}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{8}t^5+o(t^7)\right)\Big|_0^{x^2}}{x^b} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}t^6-\frac{1}{8}t^{10}+o(t^{14})}{t^b} = \frac{1}{3}$$

$\therefore \int_0^{x^2}\ln(1+t^2)dt$ 是 x 的 6 阶无穷小.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\cdot f(x_i)$. ← 实际应用中多为 $\frac{1}{n}\cdot f(\frac{i}{n})$ 的形式.

↓

利用定积分求下列极限:

(1). $l = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^{3/2}}$ 通常情况下,将区间 $[a,b]$ n等分.

$\frac{b-a}{n}$ 即为一块小矩形的宽.

令 $S_n = \frac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\cdot\sqrt{n}} = \frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{n}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}$

$f(x_i)$ 为小矩形的高.

∴ 取 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$. $x_i = \frac{i}{n}$. $b=1$. $a=0$

$\Rightarrow l = \int_0^1 f(x)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$.

(2). $l = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$ ← 带根号,考虑取对.

$l = \lim_{n\to\infty} e^{\ln\left\{\frac{1}{n}\cdot[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{\frac{1}{n}}\right\}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]-\ln n}$

$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\left[\ln(n+1)+\ln(n+2)+\cdots+\ln(n+n)\right]-\ln n}$

$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(n+i)-\ln n}$ $= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(1+\frac{i}{n})+\ln n\right]-\ln n}$

$= e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})}$

对指数: 记 $f(x) = \ln(1+x)$ $x_i = \frac{i}{n}$ $b=1$. $a=0$.

则 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n}) = \int_0^1\ln(1+x)dx = x\ln(1+x)\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{x}{1+x}dx$

$= \ln 2 - (1-\ln 2) = 2\ln 2 - 1$

$\therefore l = e^{\ln 4 - 1} = \frac{4}{e}$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

例. $I=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right]$

当 $n\to\infty$，分母中 $1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n}$ 可全部忽略.

$\therefore I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi$.

令 $f(x)=\sin\pi x$，$x_i=\frac{i}{n}$，$b=1$，$a=0$.

$\therefore I=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{-1}{\pi}\cos\pi x\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}$.

设 $f(x)$ 是以 T 为周期的处处连续的周期函数. 证明 $\int_a^{a+T}f(x)dx$ 与 a 无关.

$\Leftrightarrow$ 证 $\int_a^{a+T}f(x)dx=\int_0^T f(x)dx$.

令 $F(a)=\int_a^{a+T}f(x)dx-\int_0^T f(x)dx$. 即证 $F(a)=0$.

$F'(a)=\frac{d}{da}\int_a^{a+T}f(x)dx-0=f(a+T)-f(a)=0$

$\therefore F(a)\equiv$ 常数.

$\because F(0)=\int_0^T f(x)dx-\int_0^T f(x)dx=0$

$\therefore$ 该常数为 0. 即 $F(a)\equiv 0$. 得证. D.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单增. 证明: $g(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上单增.

$$g'(x)=\frac{-1}{(x-a)^2}\cdot\int_a^x f(t)dt+\frac{1}{x-a}\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt$$

$$=\frac{f(x)(x-a)-\int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$$

$\because f(x)$ 在 $[a,b]$ ↑. 且 $t\in[a,x]$

$\therefore \int_a^x f(t)dt \le \int_a^x f(x)dt = f(x)\cdot t\Big|_a^x = f(x)(x-a)$.

($f(x)$ 打常数 t.)

$\therefore$ 分子 ≥ 0. $\Rightarrow g'(x)\ge 0$

$\therefore g(x)$ 在 $[a,b]$ 上↑.

设 $x>0$ 时 $f(x)$ 可微. 若函数满足 $f(x)=1+\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt$, 求 $f(x)$. (*)

(*)式两边同乘 x: ← 存在"$\frac{1}{x}$", 麻烦.

$xf(x)=x+\int_1^x f(t)dt$. 考虑同乘 x 消去.

两边求导: $f(x)+xf'(x)=1+\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt$

$f(x)+xf'(x)=1+f(x)$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}$ $\Rightarrow f(x)=\ln x+C$.

$\because$ 当 $x=1$ 时, $f(1)=1+1\cdot\int_1^1 f(t)dt=1$

$\therefore C=1$

$\therefore f(x)=\ln x+1$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No

Date

设 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，且满足 $f(x)=\cos x+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$，求 $f(x)$.

对于 $f(x)$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ 为常数，不妨设 $C=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$，(*)

则 $f(x)=\cos x+C$

∴ 由(*)式，$C=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+C)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}} C\,dt$

$=\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+Ct\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow C=1+C\cdot\frac{\pi}{2}\Rightarrow C=\frac{2}{2-\pi}$

∴ $f(x)=\cos x+\frac{2}{2-\pi}$.

已知 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，求 $\int_0^2 x f''(x)\,dx$.

$ys=\int_0^2 x\,df'(x)=xf'(x)\Big|_0^2-\int_0^2 f'(x)\,dx$

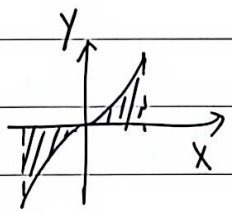
$=2f'(2)-0-f(x)\Big|_0^2=8$.

求 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\arcsin\sqrt{1-x^2}\,dx$.

观察 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$ ← 对称.

被积函数：$\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ → 奇函数，$\arcsin\sqrt{1-x^2}$ → 偶函数

↑ 奇×偶=奇.



∴ $ys=0$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求：$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

令 $t=\frac{1}{x}$. 则 $dx=-\frac{1}{t^2}dt$

当 $x: 1\to\sqrt{3}$. $t: 1\to\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\therefore YS=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{-dt}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}=-\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$

$$=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \left(\sqrt{t^2+1}\right)'dt=\sqrt{t^2+1}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1=\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

求：$\int_0^1 x(1-x)^{2020}\,dx$.

由 $\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^a [f(x)+f(a-x)]\,dx$. ☆

$$YS=\frac{1}{2}\int_0^1 \left[x(1-x)^{2020}+(1-x)\cdot x^{2020}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \left[x(1-x)^{2020}+x^{2020}-x^{2021}\right]dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^{2020}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 x^{2020}\,dx-\frac{1}{2}\int_0^1 x^{2021}\,dx$$

即 $YS=\frac{1}{2}YS+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2021}x^{2021}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2022}x^{2022}\Big|_0^1$

$$\therefore YS=\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}$$

求：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^k x}$.

$$YS=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{1+\tan^k x}+\frac{1}{1+\tan^k\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]dx.$$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{1+\tan^k x}+\frac{\tan^k x}{\tan^k x+1}\right]dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot dx=\frac{\pi}{4}.$$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)+f(-x)=A$（常数）. 证明 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx = A\int_0^a g(x)\,dx$. 并利用以上结果求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x\,dx$.

证明：$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)g(x)\,dx + \int_0^a f(x)g(x)\,dx$.

令 $x=-t$, $dx=-dt$

$x: -a\to 0$, $t: a\to 0$

$= \int_a^0 f(-t)g(-t)(-dt) + \int_0^a f(x)g(x)\,dx$

$= \int_0^a f(-t)g(t)\,dt + \int_0^a f(x)g(x)\,dx$ ← $g(x)$ 为偶.

$= \int_0^a [f(-x)+f(x)]g(x)\,dx$ ← 积分与积分变量名无关. 合并.

$= A\int_0^a g(x)\,dx$. 口.

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+e^x}\sin^4 x\,dx = 1\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$ ← Wallis

$4 = 2\times 2$.

$= \frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{16}$.

[法二]. $\sin^4 x = (1-\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)$

思路：降幂.

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$.

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right)dx$

$= \frac{3}{8}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{32}\sin 4x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{3\pi}{16} - 0 + 0 = \frac{3\pi}{16}$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，证明 $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[f(x)+f(-x)]dx$，并利用以上结果求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx$.

证明：$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

令 $x=-t$. $dx=-dt$.

$= \int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-dt) + \int_{0}^{a} f(x)dx$

$= \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx$

$= \int_{0}^{a}[f(-x)+f(x)]dx$. □

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1+\sin -x} + \frac{1}{1+\sin x}\right]dx$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\cos^2 x}dx = 2\tan x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2$.

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $\int_{a}^{b} f(x)dx = 0$. 证明：$\exists \xi \in (a,b)$，使得 $\int_{a}^{\xi} f(x)dx = f(\xi)$.

思路来源：令对何选出 $f(\xi) - \int_{a}^{\xi} f(x)dx = 0$ 的形式. 右侧乘指数函数，且需要负号.

构造辅助函数 $F(x) = e^{-x}\int_{a}^{x} f(t)dt$ ☆ 则 $F(a)=0$. $F(b)=0$.

由 Rolle 定理，$\exists \xi \in (a,b)$ 使 $F'(\xi)=0$.

$\because F'(x) = -e^{-x}\int_{a}^{x} f(t)dt + e^{-x}f(x)$

$= e^{-x}[f(x) - \int_{a}^{x} f(t)dt]$

$\therefore \exists \xi \in (a,b)$. $f(\xi) - \int_{a}^{\xi} f(t)dt = 0$ 即 $f(\xi) = \int_{a}^{\xi} f(x)dx$.

□

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

设 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上有连续导数，且 $f(2)=f(4)=0$. 证明：

$$\left|\int_2^4 f(x)\,dx\right| \le \max_{x\in[2,4]} |f'(x)|.$$

$\because f'(x)$ 在 $[2,4]$ 上连续

$\therefore$ 必存在最大值，记为 M.

当 $x\in[2,3]$：由 Lagrange，$f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$，$\xi_1\in(2,x)$.

$$\Rightarrow f(x)=f'(\xi_1)\cdot(x-2).$$

同理，当 $x\in[3,4]$：$f(x)=f'(\xi_2)\cdot(x-4)$. $\xi_2\in(x,4)$.

$$\therefore \left|\int_2^4 f(x)\,dx\right| = \left|\int_2^3 f(t)\,dt+\int_3^4 f(t)\,dt\right|$$

$$= \left|\int_2^3 f'(\xi_1)\cdot(t-2)\,dt+\int_3^4 f'(\xi_2)\cdot(t-4)\,dt\right|$$

$$\le \left|f'(\xi_1)\cdot\int_2^3(t-2)\,dt\right| + \left|f'(\xi_2)\cdot\int_3^4(t-4)\,dt\right|$$

$$\le f'(\xi_1)\cdot\int_2^3|t-2|\,dt + f'(\xi_2)\cdot\int_3^4|t-4|\,dt$$

$$= f'(\xi_1)\cdot\left(\frac{1}{2}t^2-2t\right)\Big|_2^3 + f'(\xi_2)\cdot\left(4t-\frac{1}{2}t^2\right)\Big|_3^4$$

$$= f'(\xi_1)\cdot\frac{1}{2}+f'(\xi_2)\cdot\frac{1}{2} \le M\cdot\frac{1}{2}+M\cdot\frac{1}{2}=M$$

$$\therefore \left|\int_2^4 f(x)\,dx\right| \le \max_{x\in[2,4]}|f'(x)|$$

□.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可导，且 $f''(x)\geq 0$.

证明：$\int_a^b f(x)\,dx \geq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

由 Taylor：在 $x_0=\frac{a+b}{2}$ 处展开，

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+o(x^2).$$

$\because f''(x)\geq 0$

$\therefore f(x)\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$.

两边在 $[a,b]$ 上积分：

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a)+\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\int_a^b x\,dx-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{a+b}{2}\cdot(b-a)$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}(b^2-a^2)-f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

$$=f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot(b-a).$$

得证.

KOKUYO
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续且单调↓. 证明: $\forall a \in (0,1)$. 都有

$\int_0^a f(x)dx \geq a\int_0^1 f(x)dx$

$\Leftrightarrow$ 证 $\int_0^a f(x)dx - a\int_0^1 f(x)dx \geq 0$

$\because \int_0^1 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^1 f(x)dx$

$\therefore \Leftrightarrow$ 证 $(1-a)\int_0^a f(x)dx - a\int_a^1 f(x)dx \geq 0$

由积分中值定理, $\exists \xi_1 \in [0,a]$ 使 $\int_0^a f(x)dx = f(\xi_1)\cdot(a-0)$

$\exists \xi_2 \in [a,1]$ 使 $\int_a^1 f(x)dx = f(\xi_2)\cdot(1-a)$.

$\therefore \Leftrightarrow$ 证 $(1-a)\cdot a f(\xi_1) - a(1-a)f(\xi_2) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ 证 $a(1-a)\cdot[f(\xi_1) - f(\xi_2)] \geq 0$. $(*)$

$\because a(1-a) \geq 0$. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上↓且 $\xi_1 \leq \xi_2$

$\therefore f(\xi_1) \geq f(\xi_2) \Rightarrow (*)$ 式成立. 口.

求: $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$.

令 $t = \frac{1}{x}$. $\Rightarrow x = \frac{1}{t}$. $dx = -\frac{1}{t^2}dt$. 当 $x: 0 \to +\infty$, $t: +\infty \to 0$

$\therefore y_5 = \int_{+\infty}^0 \frac{-\ln t}{1+\frac{1}{t^2}}\cdot(-\frac{1}{t^2})dt = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln t}{t^2+1}dt = \int_{+\infty}^0 \frac{\ln x}{1+x^2}dx = -y_5$.

$\therefore y_5 = 0$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求 $=\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$.

$=-\int_1^{+\infty} \arctan x\, d(\frac{1}{x})$

$=-\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$

设 $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$

$\Rightarrow A=1.\ B=-1.\ C=0.$

$=\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})\,dx$ ← 先别急着积分！否则出现两个无穷，无法收敛.

$=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}\left[\ln b-\ln 1-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)+\frac{1}{2}\ln 2\right]$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2+\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$ → $=\lim_{b\to+\infty}\ln\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2}+1}}=\ln 1=0$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$

求：$y=\int_0^x\sqrt{\sin t}\,dt$，$x\in[0,\pi]$ 曲线的弧长 S.

$y'=\frac{d}{dx}\int_0^x\sqrt{\sin t}\,dt=\sqrt{\sin x}$

$\therefore S=\int_0^{\pi}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin x}\,dx$

$du=\cos x\,dx=\pm\sqrt{1-u^2}\,dx$

令 $u=\sin x$. 由于 $\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 和 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上异号 → 分段.

$\therefore S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin x}\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{1+\sin x}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+u}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du+\int_1^0\sqrt{1+u}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$

$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-u}}\,du+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-u}}\,du=4.$

[注]. $\sqrt{1+\sin x}=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$. V.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

求 $\int \frac{dx}{x(1+x^8)}$

$$\text{原式} = \int \frac{x^7\,dx}{x^8(1+x^8)} = \int \frac{\frac{1}{8}\,d(x^8)}{x^8(1+x^8)} = \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{x^8} - \frac{1}{1+x^8}\right) d(x^8)$$

$$= \frac{1}{8}\ln\frac{x^8}{1+x^8} + C.$$

求 $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x^2+2x+1) + B(x^2+x) + Cx}{x(x+1)^2}$$

$$\therefore \begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1. \end{cases}$$

$$\therefore \text{原式} = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx = \ln|x| - \ln|x+1| - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,d(x+1)$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

求 $\int \frac{x^{2n-1}}{1+x^n}\,dx$

注意到 $x^{2n-1}\,dx = \frac{1}{2n}\,dx^{2n}$ 令 $t = x^n$.

$$\text{原式} = \int \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{1+x^n}\,dx^{2n} = \frac{1}{2n}\int \frac{dt^2}{1+t} = \frac{1}{n}\int \frac{t}{1+t}\,dt = \frac{1}{n}\int \frac{(1+t)-1}{1+t}\,dt$$

$$= \frac{1}{n}\int dt - \frac{1}{n}\int \frac{1}{1+t}\,dt = \frac{1}{n}t - \frac{1}{n}\ln|1+t| + C.$$

$$= \frac{1}{n}\left[x^n - \ln|1+x^n|\right] + C.$$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No. 40

Date

求：$\int \sin x \sin 3x \, dx$.

[法一：积化和差] 遇出现 sinsin，则降 cos - cos.

$$ys = \int \frac{1}{2}[\cos(3x-x) - \cos(3x+x)]\,dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx - \frac{1}{2}\int \cos 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C.$$

[法二：分部积分]. $ys = -\int \sin 3x \, d\cos x = -\sin 3x \cos x + \int \cos x \, d\sin 3x$

$$= -\sin 3x \cos x + 3\int \cos x \cos 3x \, dx = -\sin 3x \cos x + 3\int \cos 3x \, d\sin x$$

$$= -\sin 3x \cos x + 3\cos 3x \sin x - 3\int \sin x \, d\cos 3x$$

$$= -\sin 3x \cos x + 3\cos 3x \sin x + 9\underbrace{\int \sin x \sin 3x \, dx}_{=ys}$$

$$\therefore ys = \frac{1}{8}\sin 3x \cos x - \frac{3}{8}\cos 3x \sin x + C.$$

求：$\int \frac{dx}{4 - 5\sin x}$.

万能代换. 令 $t = \tan\frac{x}{2}$，则有 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$$\therefore ys = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}\,dt}{4 - \frac{10t}{1+t^2}} = \int \frac{1}{2t^2 - 5t + 2}\,dt = \int \frac{1}{(t-2)(2t-1)}\,dt$$

$$= \int\left(\frac{\frac{1}{3}}{t-2} + \frac{-\frac{2}{3}}{2t-1}\right)dt = \frac{1}{3}\ln|t-2| - \frac{1}{3}\ln|2t-1| + C$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2} - 2}{2\tan\frac{x}{2} - 1}\right| + C.$$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

求: $\int \frac{\sin^2 x+1}{\cos^4 x}\,dx$.

$$\text{原式} = \int \frac{\sin^2 x+1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (\tan^2 x+\sec^2 x)\,d\tan x$$

$$= \int (\tan^2 x+\tan^2 x+1)\,d\tan x = \frac{2}{3}\tan^3 x+\tan x+C.$$

求: $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{dx}{(2-x)^2}$

令 $t=\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$ 则 $t^3=\frac{2-x}{2+x} \Rightarrow x=\frac{2-2t^3}{t^3+1}$. $dx=\frac{-12t^2}{(t^3+1)^2}\,dt$.

$$\therefore \text{原式} = \int t\cdot\frac{(t^3+1)^2}{16t^6}\cdot\frac{-12t^2}{(t^3+1)^2}\,dt = \int \frac{-3}{4}\cdot\frac{1}{t^3}\,dt$$

$$= -\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-2}+C = \frac{3}{8}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{2}{3}}+C.$$

求: $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$

$$\text{原式} = \int \frac{(x+\sqrt{x^2-1})\,dx}{x^2-(x^2-1)} = \int x\,dx+\int \sqrt{x^2-1}\,dx.$$

令 $x=\sec t$. 则 $x^2-1=\sec^2 t-1=\tan^2 t$. $dx=\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$.

$$\Rightarrow \int \sqrt{x^2-1}\,dx = \underbrace{\int \tan t\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt}_{(*)} = \int \tan^2 t\cdot\sec t\,dt$$

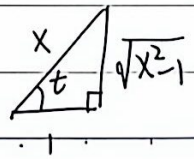
$$= \int (\sec^2 t-1)\sec t\,dt = \int \sec^3 t\,dt-\int \sec t\,dt$$

$$= \int \sec t\,d(\tan t)-\int \frac{d\sin t}{\cos^2 t}$$

$$= \sec t\tan t-\underbrace{\int \tan t\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt}_{(*)}-\int \frac{d\sin t}{1-\sin^2 t}$$

$$\Rightarrow 2(*) = \sec t\cdot\tan t-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+C.$$

$$\therefore \int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\sec t\cdot\tan t-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|+C.$$



Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$$\therefore \int \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}{1-\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}\right| + C.$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right| + C$$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

求: $\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2}\,dx$.

$$y = \int \frac{(1+x^2-1)\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int \arctan x\,dx - \int \arctan x\,d(\arctan x)$$

$$= x\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

$$= x\arctan x - \int \frac{\frac{1}{2}d(1+x^2)}{1+x^2} - \frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C.$$

求: $\int \frac{dx}{5\sin 2x - 2\sin x}$

令 $t = \tan\frac{x}{2}$. 则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$. $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. $\sin 2x = \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

$$\therefore y = \int \frac{1}{\frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} - \frac{4t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = -\frac{1}{4}\int \frac{1+t^2}{t^3}\,dt$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-2} - \frac{1}{4}\cdot\ln|t| + C$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\tan^2\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$f(x)$是可微函数，它有反函数$f^{-1}(x)$. 已知$\int f(x)dx = F(x)+C$.

证明：$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C$.

证：$\because \int f(x)dx = F(x)+C$

$\therefore F'(x) = f(x)$. $\Rightarrow x = f[f^{-1}(x)] = F'[f^{-1}(x)]$ ☆

由分部积分：$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - \int x\,df^{-1}(x)$

$= xf^{-1}(x) - \int F'[f^{-1}(x)]\,df^{-1}(x)$

$= xf^{-1}(x) - F[f^{-1}(x)] + C$. □.

[法二]. 直接对右边求导：

$f^{-1}(x) + x[f^{-1}(x)]' - F'[f^{-1}(x)]$

$= f^{-1}(x) + x[f^{-1}(x)]' - f[f^{-1}(x)]\cdot[f^{-1}(x)]'$

$= f^{-1}(x) + x[f^{-1}(x)]' - x[f^{-1}(x)]' = f^{-1}(x)$. □.

设$f(x)$在$[a,b]$连续. 若$\int_a^b f(x)dx = 0$. 证：在$[a,b]$中至少有一点c，使$f(c)=0$.

由积分中值定理，$\exists\, c\in[a,b]$，使$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$.

$\because (b-a)\neq 0$

$\therefore f(c) = 0$. □.

设$f(x)$在$[a,b]$连续，M为$|f(x)|$在$[a,b]$上的最大值.

求证：$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M(b-a)$.

$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b M dx = M\cdot(b-a)$ □.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求函数族 $y=\frac{c}{x}+2x$ 所满足的一阶微分方程.

对 x 求导: $y'=-\frac{c}{x^2}+2$. ①

由 $y=\frac{c}{x}+2x \Rightarrow c=xy-2x^2$. ②

把②代入①: $y'=-\frac{xy-2x^2}{x^2}+2=-\frac{y}{x}+4$

$\therefore xy'+y-4x=0$.

求圆心在直线 $y=2x$ 上的半径为1的圆族所满足的一阶微分方程.

$(x-x_0)^2+(y-2x_0)^2=1$.

对 x 求导: $2(x-x_0)+2(y-2x_0)\cdot y'=0$.

$\Rightarrow x_0=\frac{x+2yy'}{1+2y'}$

代入原方程: $\left(x-\frac{x+2yy'}{1+2y'}\right)^2+\left(y-\frac{2x+2yy'}{1+2y'}\right)^2=1$

化简, 得: $(2x-y)^2(y'^2+1)=(1+2y')^2$.

若曲线的切线在 x 轴与 y 轴上截距之和为2, 求曲线所满足的一阶微分方程.

切线斜率: $y'=k$

切点在曲线上: $y=kx+b$

截距之和为2: $b+\frac{-b}{k}=2$

消去 k,b $\longrightarrow$ $y=y'x+\frac{2y'}{y'-1}$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$\frac{dy}{dx}=f(\frac{y}{x})$. 即 x,y 同时变为 k 倍，等价成立.

验证下列微分方程是齐次方程，并求其通解：

(1). $x\frac{dy}{dx}=y\ln\frac{y}{x}$. 是.

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$. 令 $t=\frac{y}{x}$. 则 $y=tx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=t'x+t$.

$\therefore t'x+t=t\ln t$ 即 $\frac{dt}{dx}\cdot x=t\ln t-t$

$\Rightarrow \frac{dt}{t\ln t-t}=\frac{dx}{x}$.

积分得：$\ln|\ln t-1|=\ln x+C_1 \Rightarrow \ln t-1=Cx$

$\therefore \ln\frac{y}{x}=Cx+1 \Rightarrow y=x\cdot e^{Cx+1}$.

(2). $(x+y\cos\frac{y}{x})dx-x\cos\frac{y}{x}dy=0$.

$(x+y\cos\frac{y}{x})dx=x\cos\frac{y}{x}dy$

$\Rightarrow 1+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}=\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx}$. 令 $t=\frac{y}{x}$. $\Rightarrow \frac{dy}{dx}=t'x+t$.

$\therefore 1+t\cos t=\cos t\cdot(t'x+t) \Rightarrow 1=t'x\cos t$

$\therefore \frac{1}{x}dx=\cos t\,dt \Rightarrow \sin t=\ln x+C_1$.

$\therefore e^{\sin\frac{y}{x}}=Cx$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求解 $y'=\frac{2x-y}{x+y}$. ← 齐次. 上下同÷任意一项.

$y'=\frac{2-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$ 令 $t=\frac{y}{x}$. $\Rightarrow y'=t'x+t$.

$\therefore t'x+t=\frac{2-t}{1+t} \Rightarrow \frac{(1+t)dt}{2-2t-t^2}=\frac{dx}{x}$

$\therefore \frac{-\frac{1}{2}d(2-2t-t^2)}{2-2t-t^2}=\frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|2-2t-t^2|=\ln x+C_1$

$\Rightarrow (2-2t-t^2)^{-\frac{1}{2}}=C_2x$

$\therefore \frac{1}{2-2t-t^2}=C_2^2x^2$ 代入 $t=\frac{y}{x}$ 得 $\frac{1}{2x^2-2xy-y^2}=C_2^2$

$\therefore 2x^2-2xy-y^2=C$.

求下列一阶线性微分方程的通解:

(1). $y'+y=e^{-x}$.

Bernoulli. $y'+a(x)y=b(x)$.

$a(x)=1 \Rightarrow A(x)=x$. $b(x)=e^{-x}$.

$\therefore y=e^{-A(x)}\cdot\left[\int e^{A(x)}b(x)dx+C\right]=e^{-x}\left[\int e^{x}\cdot e^{-x}dx+C\right]$

$=e^{-x}(x+C)$.

KOKUYO
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

(2). $y' = \frac{y}{x-y^2}$. → 分子单独，分母打多项式. 左右两边取倒数，转化为 $\frac{dx}{dy}$ 即 x 关于 y 求导.

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-y^2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x-y^2}{y} = \frac{1}{y}\cdot x - y$

$\therefore x' - \frac{1}{y}\cdot x = -y$. $a(y) = -\frac{1}{y} \Rightarrow A(y) = -\ln y$. $b(y) = -y$.

$\therefore x = e^{-A(y)}\cdot[\int e^{A(y)} b(y)\,dy + C]$

$= e^{\ln y}\cdot[\int e^{-\ln y}\cdot(-y)\,dy + C]$

$= y\cdot(-y+C)$. $\Rightarrow x = -y^2 + Cy$.

(3). $(y^2-6x)\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{y^2-6x} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{y^2-6x}{2y} = -\frac{3}{y}\cdot x + \frac{1}{2}y$.

$\therefore x' + \frac{3}{y}x = \frac{1}{2}y$. $a(y) = \frac{3}{y} \Rightarrow A(y) = 3\ln y$. $b(y) = \frac{1}{2}y$.

$\therefore x = e^{-A(y)}\cdot[\int e^{A(y)} b(y)\,dy + C]$

$= e^{-3\ln y}\cdot[\int e^{3\ln y}\cdot\frac{1}{2}y\,dy + C]$

$= y^{-3}\cdot(\frac{1}{10}y^5 + C)$

即 $x = \frac{1}{10}y^2 + \frac{C}{y^3}$.

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求 $yy' + \frac{y^2}{x} = \frac{1}{2}$ 的通解

令 $t = y^2$. 则 $t' = 2yy'$.

$\therefore \frac{1}{2}t' + \frac{1}{x}t = \frac{1}{2} \Rightarrow t' + \frac{2}{x}t = 1$. $a(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow A(x) = 2\ln x$

$b(x) = 1$.

$\therefore t = e^{-A(x)}\left[\int e^{A(x)} b(x)\,dx + C\right]$

$= e^{-2\ln x}\left[\int e^{2\ln x} \cdot 1\,dx + C\right] = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)$

$\therefore y^2 = \frac{1}{3}x + \frac{C}{x^2}$.

[总结]: Bernoulli 方程

$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)\cdot y^n$.

step 1. 两边同 $\div y^n$.

step 2. 代换 $p = y^{1-n}$

$\rightarrow p' + Qp = Q$ 开试.

求 $y\,dx = (1 + x\ln y)x\,dy$ 的通解.

$\frac{dx}{dy} = \frac{x + x^2\ln y}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}x + \frac{\ln y}{y}x^2$

$\Rightarrow x' - \frac{1}{y}x = \frac{\ln y}{y}x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2}x' - \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\ln y}{y}$.

令 $t = \frac{1}{x}$. 则 $t' = -\frac{1}{x^2}\cdot x'$

$\therefore -t' - \frac{1}{y}t = \frac{\ln y}{y} \Rightarrow t' + \frac{1}{y}t = \frac{-\ln y}{y}$. $a(y) = \frac{1}{y} \Rightarrow A(y) = \ln y$

$b(y) = \frac{-\ln y}{y}$.

$\therefore t = e^{-A(y)}\cdot\left[\int e^{A(y)} b(y)\,dy + C\right]$

$= e^{-\ln y}\cdot\left[\int e^{\ln y}\cdot\frac{-\ln y}{y}\,dy + C\right] = \frac{1}{y}(y - y\ln y + C)$

$\therefore \frac{1}{x} = 1 - \ln y + \frac{C}{y}$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

求解 $y''+2x(y')^2=0$. $y(0)=1$. $y'(0)=-\frac{1}{2}$.

"缺y型" → 代换 $t=y'$.

则有 $t'+2xt^2=0$ 即 $\frac{dt}{dx}=-2xt^2 \Rightarrow \frac{dt}{t^2}=-2x\,dx$

$\therefore -\frac{1}{t}=-x^2+C_1 \Rightarrow \frac{1}{t}=x^2+C_2$. 即 $y'=x^2+C_2$

代入 $y'(0)=-\frac{1}{2}$ 得 $C_2=-2$

$\therefore y'=\frac{1}{x^2-2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2-2}$

$\Rightarrow 1\cdot dy=\frac{1}{x^2-2}dx$. 积分，得 $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C_3$.

代入 $y(0)=1$. 得 $C_3=1$

$\therefore y=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+1$.

§. 此时立刻求 C_2. 得到分离变量后直接代入.

求解 $(1-y)y''+2(y')^2=0$.

"缺x型" → 代换 $t(y)=y'$.

则有 $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dt}{dx}=\frac{dt}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dy}\cdot t$.

$\therefore (1-y)\cdot\frac{dt}{dy}\cdot t+2t^2=0$

$\Rightarrow (1-y)\frac{dt}{dy}=-2t \Rightarrow \frac{dt}{-2t}=\frac{1}{1-y}dy$

$\therefore -\frac{1}{2}\ln|t|=-\ln|1-y|+C_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{1}{1-y}\cdot C_2$

$\therefore \frac{1}{t}=\frac{C_2^2}{(1-y)^2} \Rightarrow y'=\frac{(1-y)^2}{C_3}$ 即 $\frac{dy}{dx}=\frac{(1-y)^2}{C_3}$

$\Rightarrow \frac{dy}{(1-y)^2}=\frac{1}{C_3}dx \Rightarrow \frac{-d(1-y)}{(1-y)^2}=\frac{1}{C_3}dx$

$\therefore \frac{1}{1-y}=\frac{x}{C_3}+C_4$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界，$\{x_k\}$ 为数列. 下列命题正确的是[ ].

A. 若 $\{x_k\}$ 收敛，则 $\{f(x_k)\}$ 收敛.

B. 若 $\{x_k\}$ 单调，则 $\{f(x_k)\}$ 收敛.

C. 若 $\{f(x_k)\}$ 收敛，则 $\{x_k\}$ 收敛.

D. 若 $\{f(x_k)\}$ 单调，则 $\{x_k\}$ 收敛.

A. 反例：取 $f(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ 1 & (x\geq 0)\end{cases}$. $x_k=\dfrac{(-1)^k}{k}\to 0$.

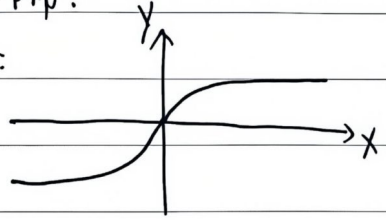
则 $f(x_k)$ 为 $0,1,0,1,\cdots$ 振荡，不收敛.

B. $\{x_k\}$ 单调 $\to$ $f(x_k)$ 单调

∴ 由单调有界收敛原理，$\{f(x_k)\}$ 收敛.

C. D. 显然，不正确.

一个反例：



$f(x_k)$ 单调、收敛.

但 x_k 可取 $(-\infty,+\infty)$，发散.

函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}}{x^n+1}$ 的间断点及类型是？

可能的间断点：$x=\pm 1$.

∵ $f(1^+)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}+1}{x^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}}{x^n+1}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n+1}=1$.

$f(1^-)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}}{x^n+1}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n+1}=1+1=2$.

∴ $x=1$ 是第一类间断点，可去间断点.

∵ $f(-1)$ 无定义

∴ $x=-1$ 是第一类……，可去……

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是 D.

A. 若 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$. → 则必为 $\frac{0}{0}$ 型. $\Rightarrow f(0)=0$.

B. 若 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$. $\because$ $\frac{0}{0}$ 型. $\Rightarrow f(x)+f(-x)=0$. 奇函数

C. 若 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在. → $f(0)=0$. $\because f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ $\therefore f(0)=0$.

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在 $\therefore f'(0)$ 存在.

D. 若 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

↳ $f(x)-f(-x)=0 \Rightarrow$ 偶函数.

偶函数在 $x=0$ 处不一定可导. 反例：$y=|x|$.

曲线 $y=x\ln(4+\frac{1}{x})$ $(x>0)$ 的渐近线条数为. 1

① 当 $x\to+\infty$：$\lim_{x\to+\infty}x\ln(4+\frac{1}{x})=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln 4\to+\infty$. 即 $y\to+\infty$.

$\therefore$ 无水平渐近线.

② y 在 $x=0$ 处间断.

当 $x\to 0^+$：$\lim_{x\to 0^+}x\ln(4+\frac{1}{x})=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(4+t)}{t}=0$.

$\therefore$ 无铅直渐近线.

③ 令 $k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln(4+\frac{1}{x})=\ln 4$.

$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}[x\ln(4+\frac{1}{x})-x\ln 4]=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln(1+\frac{1}{4x})$

$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(1+\frac{t}{4})}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{t}{4}}{t}=\frac{1}{4}$.

$\therefore$ 有斜渐近线 l：$y=x\cdot\ln 4+\frac{1}{4}$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt$. 则 $F(x)$. A.

A. 为正常数. B. 为负常数. C. 恒为零. D. 不为常数.

由于 $e^{\sin t}\cdot\sin t$ 为 $T=2\pi$ 的周期函数. 且积分区间长度恰为 2π.

∴ $F(x)$ 为常数.

$F(x)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin t}\sin t\,dt=\int_0^{\pi}[f(x)+f(-x)]\,dx=\int_0^{\pi}[e^{\sin x}-e^{-\sin x}]\sin x\,dx$.

其中 $f(x)=e^{\sin x}\sin x$

∵ 在 $(0,\pi)$ 上, $e^{\sin x}-e^{-\sin x}>0$. $\sin x>0$.

↑ 令 $y=e^{\sin x}-e^{-\sin x}$. 求导可得.

∴ $F(x)>0$.

曲线 $y=x\sin x+2\cos x\ (-\frac{\pi}{2}<x<2\pi)$ 的拐点是.

$y'=\sin x+x\cos x-2\sin x=-\sin x+x\cos x$

$y''=-\cos x+\cos x-x\sin x=-x\sin x$.

$y'''=-\sin x-x\cos x$.

令 $y''=0\Rightarrow x=0$ 或 π.

当 $x=0$, $y'''=0$ → 不是.

当 $x=\pi$, $y'''\neq 0$ → 是.

∴ 拐点为 $(\pi,-2)$.

↑ B 拐点是一个点 B.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

曲线 $y=\ln\cos x\ (0\le x\le\frac{\pi}{6})$ 的弧长为？

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)d\sin x=\frac{1}{2}\cdot\left|\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|\right|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\ln 3.$$

$y=2^x$ 的麦克劳林公式中 x^n 的项的系数是

麦克劳林公式：$x_0=0$ 处展开.

$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot(x-0)^k$

$\because y^{(n)}=(\ln 2)^n\cdot 2^x$

$\therefore f^{(k)}(0)=(\ln 2)^n \Rightarrow$ 系数为 $\frac{(\ln 2)^n}{n!}$

$f(x)$ 是连续函数，且满足 $f(x)=x^2-x\cdot f(2)+2\int_0^1 f(x)\,dx$. 求 $f(x)$.

记 $C=\int_0^1 f(x)\,dx$.

则 $f(x)=x^2-x\cdot f(2)+2C$.

代回 C 的表达式：$C=\int_0^1[x^2-x\cdot f(2)+2C]\,dx$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}f(2)x^2+2Cx\right]\Big|_0^1$$

$\therefore C=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}f(2)+2C$

又 $\because f(2)=4-2f(2)+2C$

$\therefore$ 解得 $f(2)=\frac{5}{3}$. $C=\frac{1}{2}$.

$\therefore f(x)=x^2-\frac{5}{3}x+1$.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n+i}$.

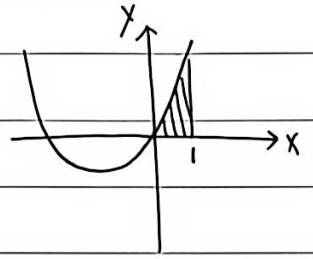
$\because \frac{1}{n+i}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}$.

$\therefore$ 取 $b=1$, $a=0$. $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $x_i=\frac{i}{n}$.

$\Rightarrow I=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln|1+x|\Big|_0^1=\ln 2$.

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点. 当 $0\le x\le 1$ 时, $y\ge 0$. 由该抛物线与直线 $x=1$ 及 x 轴围成平面图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 求 a,b,c 使该图形绕 X 轴转一周形成的旋转体体积 V 最小.

过原点 $\to c=0$.



$\int_0^1(ax^2+bx)dx=\frac{1}{3}\Rightarrow\left(\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow a=1-\frac{3}{2}b$.

$V=\int_0^1\pi(ax^2+bx)^2\cdot dx=\cdots=\pi\cdot\left(\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2\right)$

$=\frac{\pi}{30}(b^2-3b+6)=\frac{\pi}{30}\left[(b-\frac{3}{2})^2+\frac{15}{4}\right]$

$\therefore$ 当 $b=\frac{3}{2}$ 时, 有 V_{min}.

此时 $a=-\frac{5}{4}$. $b=\frac{3}{2}$. $c=0$.

KOKUYO
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

设 $f''(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续且 $|f''(x)| \le M$. $f(1)=0$.

证明: $\left|\int_0^2 f(x)\,dx\right| \le \frac{M}{3}$.

在 $x_0=1$ 处 Taylor 展开: $f(x)=f(1)+f'(1)\cdot(x-1)+f''(\xi)\cdot\frac{1}{2!}\cdot(x-1)^2$.

ξ 介于 x, 1 之间.

$\because f(1)=0$. $\int_0^2 (x-1)\,dx = 0$.

$$\therefore \left|\int_0^2 f(x)\,dx\right| = \left|\int_0^2 [f(1)+f'(1)\cdot(x-1)+\tfrac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2]\,dx\right|$$

$$\le \left|\int_0^2 f(1)\,dx\right| + \left|\int_0^2 f'(1)\cdot(x-1)\,dx\right| + \left|\int_0^2 \tfrac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2\,dx\right|$$

$$= 0+0+\left|\int_0^2 \tfrac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2\,dx\right| \le \tfrac{1}{2}|f''(\xi)|\cdot\int_0^2 |(x-1)^2|\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}|f''(\xi)|\cdot\left[\int_0^1 |(x-1)^2|\,dx + \int_1^2 |(x-1)^2|\,dx\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}|f''(\xi)|\cdot\tfrac{2}{3} \le \frac{M}{3}.$$ □.

当 $x\to 0$ 时, $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 是 A.

A. 无界的但不是无穷大量　　B. 无穷大量

C. 有界的但不是无穷小量　　D. 无穷小量.

当 $x\to 0$ 时, $\frac{1}{x}\to\infty$.

① 当 $\frac{1}{x}\to 2k\pi$, $k\to\infty$. 则 $\sin\frac{1}{x}=0 \Rightarrow f(x)=0$.

② 当 $\frac{1}{x}\to 2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\to\infty$. 则 $\sin\frac{1}{x}=1$. $\Rightarrow f(x)=\infty$.

$\therefore f(x)$ 既非无穷大量, 又非无穷小量.

且 $f(x)$ 无界.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

若 $f'(2x)=e^{-x}$，且 $f(0)=1$，则 $\int f(x)dx=$

令 $t=2x$，则 $x=\frac{t}{2}$.

$\therefore f'(t)=e^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow f(t)=\int f'(t)dt=-2e^{-\frac{t}{2}}+C_1$

$\because f(0)=1$

$\therefore -2\cdot e^0+C_1=1 \Rightarrow C_1=3$ 即 $f(x)=-2e^{-\frac{x}{2}}+3$.

$\therefore \int f(x)dx=4e^{-\frac{x}{2}}+3x+C$.

下列反常积分收敛的是 D.

A. $\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$.　　B. $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$.

C. $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$.　　D. $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx$.

A: $\int\frac{\ln x}{x}dx=\int\ln x\cdot d\ln x=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}(\ln x)^2=+\infty$ 发散.

B: $\int\frac{1}{x\ln x}dx=\int\frac{1}{\ln x}d\ln x=\ln|\ln x|+C$.

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\ln|\ln x|=+\infty$. 发散.

C: $\int\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{\ln x}}d\ln x=2\sqrt{\ln x}+C$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}2\sqrt{\ln x}=+\infty$. 发散.

D: $\int\frac{1}{x(\ln x)^2}dx=\int\frac{1}{(\ln x)^2}d\ln x=-\frac{1}{\ln x}+C$.

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{1}{\ln x}=0$　　$\therefore \int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^2}dx=-\frac{1}{\ln x}\Big|_e^{+\infty}=0-(-1)=1$.

收敛.

KOKUYO

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

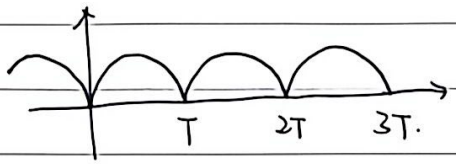
No.

Date

$f(x)$ 为周期为 T 的连续函数，a 为常数. 则下列以 T 为周期函数为的是

A. $\int_x^{x+a} f(t)\,dt$.　　B. $\int_a^{x+T} f(t)\,dt$.　　C. $\int_a^x f(t+T)\,dt$.　　D. $\int_a^x f(t)\,dt$.

画图：



不妨从 $x=0$ 开始看：

对 A，一段长为 a 的积分，随 x 个，周期性变化.

对 B，从一个定点 a 开始，变上限积分，若 a 个则积分一直个. 非周期.

C 等价，变上限积分，显然不是周期函数

证 A 为周期函数：

令 $F(x)=\int_x^{x+a} f(t)\,dt$.

则 $F(x+T)-F(x)=\int_{x+T}^{x+a+T} f(t)\,dt-\int_x^{x+a} f(t)\,dt$

$$=\int_x^{x+a+T} f(t)\,dt-\int_x^{x+T} f(t)\,dt-\int_x^{x+a} f(t)\,dt$$

$$=\int_{x+a}^{x+a+T} f(t)\,dt-\int_x^{x+T} f(t)\,dt.$$

$\because f(t)$ 为周期为 T

$\therefore \int_{x+a}^{x+a+T} f(t)\,dt=\int_x^{x+T} f(t)\,dt$.

$\therefore F(x+T)=F(x)$.　　□.

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求 $l=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,dt}{1-\cos x^2}$.

当 $x\to 0$，$\frac{0}{0}$ 型，(洛).

$$l=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x\sin x)}{2x\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x\sin x}{2x\sin x^2}=\frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}$$

$\ln(1+x\sin x)\sim x\sin x$ $(x\sin x\to 0)$.

$\sin x\sim x$，$x\to 0$

$\sin x^2\sim x^2$，$x^2\to 0$.

函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(x)>0$，又 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\,dt$.

证：$F(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中有且仅有一个实根.

$\because F(a)=\int_b^a\frac{1}{f(t)}\,dt=-\int_a^b\frac{1}{f(t)}\,dt<0$.

$F(b)=\int_a^b f(t)\,dt>0$

$\therefore$ 由零点定理，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在零点.

$\because F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}>0$

$\therefore F(x)$ 在 $[a,b]$ 上↑.

$\therefore F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有且仅有一个零点. □

函数 $y=f(x)$ 由方程 $\begin{cases}x=t^2+1\\ y=4t-t^2\end{cases}$ $(t>0)$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\left[f\left(\frac{2n+1}{n}\right)-3\right]=1$.

令 $u=\frac{1}{n}\to 0$，则 $ys=\lim\limits_{u\to 0}\frac{1}{u}\cdot[f(u+2)-3]=\lim\limits_{u\to 0}\frac{f(u+2)-3}{u}$.

$\because$ 当 $u\to 0$，$f(u+2)\to f(2)$，$x=2\Rightarrow t=1$，$\therefore y=3$

$\therefore \lim$ 为 $\frac{0}{0}$ 型，洛：$ys=\lim\limits_{u\to 0}\frac{f'(u+2)}{1}=f'(2)=\frac{4-2t}{2t}=1$

↑KOKUYO

代入 $t=1$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$f(x)=\int_0^{3x} e^{-t^2}dt+2$. $g(x)$是$f(x)$的反函数，求$g'(2)$.

设$f(x)=y$，则$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}$. ← (对应)

∵ $f(0)=2$. 即当$x=0$时，$y=2$.

∴ $g'(2)=\frac{1}{f'(0)}$

∵ $f'(0)=\left(e^{-9x^2}\cdot 3\right)_{x=0}=3$

∴ $g'(2)=\frac{1}{3}$.

连续曲线段$y=\int_0^x\sqrt{\sin t}\,dt$ $(0\le x\le\pi)$的弧长为 4.

$$s=\int_0^{\pi}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{1+\sin x}\,dx=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx=-2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}+2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi}=2+2=4.$$

设方程$e^{xy}+\frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^y\sqrt{4-t^2}\,dt=1$可确定函数$y=y(x)$，求$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$.

两边对x求导：$e^{xy}\cdot(y+xy')+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4-y^2}\cdot y'=0$ $(*)$.

→ 变上限积分求导.

$\frac{d}{dx}\int_a^{f(x)}g(t)dt=g[f(x)]\cdot f'(x)$

∵ 在原方程中，当$x=0\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}\int_1^y\sqrt{4-t^2}\,dt=0$

∴ $y=1$.

将$x=0$，$y=1$代入$(*)$，解得$y'=-1$.

∴ $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=-1$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$f(x)=\int_0^x e^{-t^2+2t}\,dt$. 求 $I=\int_0^1 (x-1)^2 f(x)\,dx$.

$f(0)=0$. $f'(x)=e^{-x^2+2x}$.

$$I=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\cdot d(x-1)^3=\frac{1}{3}f(x)\cdot(x-1)^3\Big|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^3\,df(x)$$

$$=\frac{1}{3}\left[f(1)\cdot 0-\underbrace{f(0)}_{\|0}\cdot(-1)\right]-\frac{1}{3}\int_0^1(x-1)^2\cdot e^{-x^2+2x}\cdot d(x-1)^2\cdot\frac{1}{2}$$

$$=0-\frac{1}{6}\int_0^1(x-1)^2\cdot e^{-(x-1)^2+1}\,d(x-1)^2.$$

令 $t=(x-1)^2$ 当 $x:0\to1$. $t:1\to0$.

$$\therefore I=-\frac{1}{6}\int_1^0 t\cdot e^{-t}\cdot e\cdot dt=\frac{e}{6}\int_0^1 te^{-t}dt$$

$$=\frac{e}{6}\cdot(-e^{-t})\cdot(1+t)\Big|_0^1=\frac{e-2}{6}.$$

$f(x)=\int_0^1|t^3-x^3|\,dt$ $(0\le x\le1)$. 求 $f(x)$ 的最值.

分段 → $t^3>x^3$ 和 $t^3<x^3$ → 去绝对值.

↑ 分界点：$t=x$.

$$f(x)=\int_0^x(x^3-t^3)\,dt+\int_x^1(t^3-x^3)\,dt=\left(x^3t-\frac{1}{4}t^4\right)\Big|_0^x+\left(\frac{1}{4}t^4-x^3t\right)\Big|_x^1$$

$$=\frac{3}{2}x^4-x^3+\frac{1}{4}.$$

$\because f'(x)=6x^3-3x^2=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ 或 0.

$\therefore \min=f(\frac{1}{2})=\frac{7}{32}$

$\max=\max\{f(0),f(1)\}=\frac{3}{4}$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$f(x)$连续，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-\tan x}{x}=1$. $F(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$.

求$F'(x)$并讨论$F'(x)$的连续性.

$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$. $\frac{0}{0}$型 $\Rightarrow f(0)=0$.

$\therefore f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$. 洛用上.

令$u=xt$. 则 $du=x\,dt \Rightarrow dt=\frac{1}{x}du$. 当$t=0\to 1$, $u=0\to x$.

$\therefore F(x)=\int_0^x f(u)\cdot\frac{1}{x}du=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,du$. $(x\neq 0)$.

当$x=0$时, $F(x)=\int_0^1 f(0)\,dt=0$.

$\because$ 当$x\neq 0$时: $F'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\,du+\frac{1}{x}f(x)$.

当$x=0$时:

$$F'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,du}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,du}{x^2}$$ 洛

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}\cdot 2=1.$$

$$\therefore F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}f(x)-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\,du & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0).\end{cases}$$

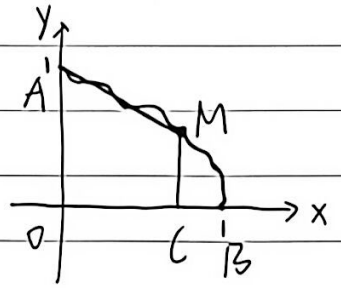
$$\because \lim_{x\to 0}F'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,du}{x^2}=2-1=1=F'(0)$$

$\therefore F'(x)$在$x=0$处连续. $\therefore F'(x)$在R上连续.

campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

曲线 $y=y(x)$ 是第一象限内的连续曲线，点 $A(0,1)$，$B(1,0)$，分别为曲线与 y 轴及 x 轴的交点，点 $M(x,y)$ 为曲线 AB 上的任意一点，过 $M(x,y)$ 作 x 轴的垂线，与 x 轴交于点 C，O 为坐标原点，设梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积和为 $\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}$. 求 $y=y(x)$ 与 y 轴及 x 轴所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.



由题意，$\frac{1}{2}(1+y)\cdot x+\int_x^1 y(t)\,dt=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}$.

两边对 x 求导：

$$\frac{1}{2}y'x+\frac{1}{2}(1+y)-y(x)=\frac{1}{2}x^2$$

$$\Rightarrow y'-\frac{1}{x}y=x-\frac{1}{x}.$$

$a(x)=-\frac{1}{x}\Rightarrow A(x)=-\ln x$. $b(x)=x-\frac{1}{x}$.

$$\therefore y=e^{-A(x)}\cdot\left[\int e^{A(x)}b(x)\,dx+C\right]=x\cdot\left[\int\frac{1}{x}\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)+C\right]$$

$$=x\cdot\left[x+\frac{1}{x}+C\right]$$

$\because$ 当 $x=1$，$y=0$. 代入，得 $C=-2$

$\therefore y=x\left(x+\frac{1}{x}-2\right)$.

$$\therefore V=\int_0^1 2\pi x y\,dx=\int_0^1 2\pi x\cdot x\left(x+\frac{1}{x}-2\right)dx=\frac{\pi}{6}.$$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$f(x)$在$[0,2]$连续，$(0,2)$内二阶可导，且$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x-\frac{1}{2}}=0$，$f(2)=2\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)dx$.

证明：$\exists\xi\in(0,2)$，使得$f''(\xi)=0$. ← 用2次Rolle构造高阶导.

$\because\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x-\frac{1}{2}}$为$\frac{0}{0}$型 $\Rightarrow f(\frac{1}{2})=0$.

$\therefore f'(\frac{1}{2})=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{x-\frac{1}{2}}=0$.

对$f(2)=2\cdot\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)dx$，由积分中值定理，$\exists$ (类似于取均值 x 矩度).
$\exists\eta\in[1,\frac{3}{2}]$，使$\int_1^{\frac{3}{2}}f(x)dx=f(\eta)\cdot[\frac{3}{2}-1]=\frac{1}{2}f(\eta)$.

则$f(2)=2\cdot\frac{1}{2}f(\eta)\Rightarrow f(2)=f(\eta)$，$\eta\in[1,\frac{3}{2}]$.
由Rolle，$\exists\xi_1\in(\eta,2)$使$f'(\xi_1)=0$.

$\because f'(\frac{1}{2})=0$，$f'(\xi_1)=0$，$\xi_1\in(\eta,2)$
$\therefore$由Rolle，$\exists\xi\in(\frac{1}{2},\xi_1)\subset(0,2)$，使$f''(\xi)=0$. □.

$f(x)$在$[0,1]$上有连续的二阶导数，$|f''(x)|\le1$. 证明：$\left|\int_0^1f(x)dx-f(\frac{1}{2})\right|\le\frac{1}{24}$.
(f(1/2)：一个集合其性质的点.)
看到高阶导数 & 分母较大的数 ⇒ 考虑 Taylor.

在$x_0=\frac{1}{2}$处Taylor展开：$f(x)=f(\frac{1}{2})+f'(\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}\cdot(x-\frac{1}{2})^2$，$\xi$介于$x$和$\frac{1}{2}$间

$\therefore\int_0^1f(x)dx=f(\frac{1}{2})\cdot x\Big|_0^1+f'(\frac{1}{2})\cdot\int_0^1(x-\frac{1}{2})dx+\frac{f''(\xi)}{2}\cdot\int_0^1(x-\frac{1}{2})^2dx$

$=f(\frac{1}{2})+0+\frac{1}{24}f''(\xi)$.

$\therefore\left|\int_0^1f(x)dx-f(\frac{1}{2})\right|=\left|\frac{1}{24}f''(\xi)\right|\le\frac{1}{24}|f''(\xi)|\le\frac{1}{24}$. □.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的斜渐近线为

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{e^x}+1}=1.$$

(洛) $\frac{\infty}{\infty}$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(1+e^x)-\ln e^x\right]$$

$$=0+\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{1+e^x}{e^x}=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}+1\right)=\ln 1=0$$

∴ 选 $y=x$.

$f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内连续，且 $\lim_{x\to0}\frac{\ln[f(x+1)+e^{x^2}]}{x^2}=2$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的 [ ].

A. 驻点，且为极大值点　　B. 驻点，且为极小值点，（使得 $f'(x)=0$ 的点 $x=x_0$）

C. 不可导点　　D. 可导点，但不是驻点.

∵ 为 $\frac{0}{0}$ 型

∴ $\lim_{x\to0}\ln[f(x+1)+e^{x^2}]=0\Rightarrow\lim_{x\to0}[f(x+1)+e^{x^2}]=1$

∵ $\lim_{x\to0}e^{x^2}=1$

∴ $f(1)=0$

当 $x\to0$，$f(x+1)+e^{x^2}\to0$，$\ln[f(x+1)+e^{x^2}]\sim$ 同一.

$$\because (*)=\lim_{x\to0}\frac{f(x+1)+e^{x^2}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x+1)}{x^2}+\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x+1)}{x^2}+1=2\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{f(x+1)}{x^2}=1$$

∴ 由保号性，在 $x=0$ 附近，$f(x+1)>0=f(1)$.

$\Rightarrow x=1$ 是极小值点.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$\because \lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x+1)}{x}}{x}=1$

$\therefore$ 不是 $\frac{0}{0}$ 型

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x}=0$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)-f(1)}{x}=0$ 即 $f'(1)=0 \Rightarrow x=1$ 是驻点

$y=f(x)$ 满足 $y'=(1-y)y^\alpha(\alpha>0)$. 若曲线 $y=f(x)$ 有一个拐点 $(t,\frac{1}{2})$.

则 $\alpha=1$.

拐点 $(t,\frac{1}{2})$ $\rightarrow$ 当 $y=\frac{1}{2}$ 时, $y''=0$.

$y''=-y'\cdot y^\alpha+(1-y)\cdot\alpha\cdot y^{\alpha-1}\cdot y'$

$=y'y^\alpha\cdot[\alpha(\frac{1}{y}-1)-1]$

代入 $y=\frac{1}{2}\Rightarrow$ 需 $\alpha\cdot(2-1)-1=0 \Rightarrow \alpha=1$.

求 $I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}}{x\sin x^2}\cdot\int_0^x \sin(x-t)^2\,dt$.

令 $u=x-t$. 则 $t=x-u$. $dt=-du$.

当 $t=0\to x$, $u=x\to 0$.

$\therefore I=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}}{x\sin x^2}\cdot\int_x^0 \sin u^2(-du)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\cdot\int_0^x \sin u^2\,du}{x\sin x^2}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin u^2\,du}{x\cdot x^2}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$.

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，其反函数为存在为 $g(x)$，若 $\int_0^{f(x)} g(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = xe^x - e^x + 1$，求 $f(x)$.

两边对 x 求导：$g[f(x)]\cdot f'(x) + f(x) = e^x + xe^x - e^x$

$$\Rightarrow x\cdot f'(x) + f(x) = xe^x \quad \text{即} \quad y' + \frac{1}{x}y = e^x \quad (x\neq 0).$$

∴ 当 $x\neq 0$ 时，由 $a(x)=\frac{1}{x} \Rightarrow A(x)=\ln x$，$b(x)=e^x$.

得 $y = e^{-A(x)}\cdot\left[\int e^{A(x)} b(x)\,dx + C\right]$

$$= \frac{1}{x}\cdot\left[\int xe^x dx + C\right] = \frac{1}{x}\left[xe^x - e^x + C\right].$$

∵ 当 $x=0$ 时，$f(x) = xe^x - xf'(x) = 0$

且 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导 $\Rightarrow$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续

∴ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ 即 $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x - \frac{e^x - C}{x}\right) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x - C}{x} = 1 \leftarrow \frac{0}{0}\text{型} \quad \because \lim_{x\to 0}(e^x - C) = 0$$

∴ $C = 1$.

∴ 综上，$f(x) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ \frac{1}{x}(xe^x - e^x + 1) & (x\neq 0). \end{cases}$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上连续且单调增加，其中 $a>0$，证明：

$a\int_0^a f(x)g(x)dx \geq \int_0^a f(x)dx \cdot \int_0^a g(x)dx$.

证：构造 $F(x)=x\int_0^x f(t)g(t)dt - \int_0^x f(t)dt \cdot \int_0^x g(t)dt$，$x\in[0,a]$.

则有 $F(0)=0$.

$F'(x)=\int_0^x f(t)g(t)dt + x\cdot f(x)g(x) - f(x)\int_0^x g(t)dt - g(x)\int_0^x f(t)dt$

$=\int_0^x f(t)g(t)dt + \int_0^x f(x)g(x)dt - \int_0^x f(x)g(t)dt - \int_0^x f(t)g(x)dt$

$=\int_0^x [f(t)g(t)+f(x)g(x)-f(x)g(t)-f(t)g(x)]dt$

$=\int_0^x \{f(t)\cdot[g(t)-g(x)]+f(x)\cdot[g(x)-g(t)]\}dt$

$=\int_0^x [f(t)-f(x)]\cdot[g(t)-g(x)]dt$.

∵ 当 $x\in[0,a]$ 时，$[f(t)-f(x)]\cdot[g(t)-g(x)]\geq 0$

$\swarrow$ $t\in[0,a]$. 当 $x\geq t$，$f(x)\geq f(t)$，$g(x)\geq g(t)$.

当 $x<t$，$f(t)>f(x)$，$g(t)>g(x)$.

∴ $F'(x)\geq 0 \Rightarrow F(x)$ 在 $[0,a]$ 上↑.

∴ $F(a)\geq F(0)=0$

即 $a\int_0^a f(t)g(t)dt \geq \int_0^a f(t)dt \cdot \int_0^a g(t)dt$. □

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$. 证明：$\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$(b-a)^2 \cdot |f''(\xi)| \geq 4|f(b)-f(a)|$.

$|f''(\xi)|$：高阶导，且含有 Taylor 展开的余项.

4：不小的偶数，考虑 Taylor 展开中 $\frac{1}{2!}$ 的制造.

分别在 $x_0=a$，$x_0=b$ 处对 $f(\frac{a+b}{2})$ Taylor 展开：

(1). $f(\frac{a+b}{2}) = f(a) + f'(a)\cdot(\frac{b-a}{2}) + \frac{f''(\xi_1)}{2}(\frac{b-a}{2})^2$. $\xi_1 \in [a, \frac{a+b}{2}]$.

(2). $f(\frac{a+b}{2}) = f(b) + f'(b)\cdot(\frac{a-b}{2}) + \frac{f''(\xi_2)}{2}(\frac{a-b}{2})^2$. $\xi_2 \in [\frac{a+b}{2}, b]$.

(1)(2) 相减，且由于 $f'(a)=f'(b)=0$

$$\Rightarrow 0 = f(a)-f(b) + \frac{1}{8}(b-a)^2\cdot[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)]$$

$$\Rightarrow 4[f(b)-f(a)] = \frac{1}{2}(b-a)^2\cdot[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)].$$

$\because |A-B| \leq |A|+|B|$

$$\therefore 4|f(b)-f(a)| \leq (b-a)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|]$$

$$= (b-a)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2|f''(\xi)| = (b-a)^2\cdot|f''(\xi)|. \quad \xi\in(a,b)$$

其中 $|f''(\xi)| = \max\{|f''(\xi_1)|, |f''(\xi_2)|\}$.

□.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导的充分条件是 D.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{2x}$ 存在.　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x^2)-f(0)}{x^2}$ 存在.

C. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{\sqrt[3]{x}}$ 存在.　　D. $\lim\limits_{x\to\infty} x f(\frac{1}{x})$ 存在.

A. $\Leftrightarrow f(x)-f(-x)=0 \Rightarrow$ 偶函数.

反例：$f(x)=|x|$.

B. $\Leftrightarrow f(0^+)=f(0)$. 只能说明右导数存在.

反例：$f(x)=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ 0 & (x<0). \end{cases}$　则 $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=1$.　$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=0$.

$\therefore f'(0)$ 不存在.

C. 反例：$f(x)=f(0)+\sqrt[3]{x}$.

则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{\sqrt[3]{x}}=1$.

但 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\infty$

$\therefore f'(0)$ 不存在.

D. 令 $t=\frac{1}{x}\to 0$.

则 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$ 存在 $\Rightarrow f(0)=0$.

$\therefore f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

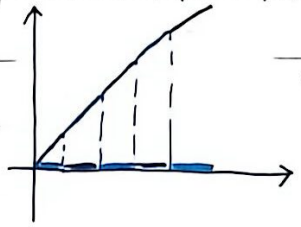
下列关于数列的描述中，正确的是 D.

A. 若 $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则必有 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 或 $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$.

B. 若 $\{x_n \cdot y_n\}$ 有界，则必有 $\{x_n\}$ 有界或 $\{y_n\}$ 有界.

C. 若 $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$，则 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

D. 若有区间 I 内的数列 $\{x_n\}$，使 $|f(x_n)|$ 无界，则 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

A. 反例：有点类似  的两函数.

e.g. $x_n = \begin{cases} 2n-1 & (n\text{为奇}) \\ 0 & (n\text{为偶}) \end{cases}$ $y_n = \begin{cases} 0 & (n\text{为奇}) \\ 2n-2 & (n\text{为偶}) \end{cases}$

则 $x_n y_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$.

但 x_n，y_n 均不收敛.

B. 反例：$x_n = n$，$y_n = \frac{1}{n}$，均无界.

C. 反例：$x_n = y_n = n$.

则 $\lim_{n\to\infty} x_n$，$\lim_{n\to\infty} y_n$ 均不存在，故不存在等式关系.

D. 若 $|f(x_n)|$ 无界，必 $\exists x_{n_0}$ 使 $|f(x_{n_0})| \to +\infty$.

$\therefore$ 有 $f(x_{n_0}) \to \infty$.

$\Rightarrow f(x)$ 无界.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

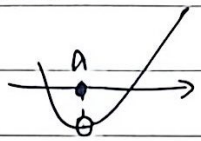
No.

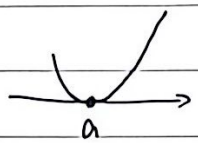
Date

$f(x)$在区间$(a,+\infty)$内可导，且$f'(x)>0$，若$f(a)=0$，则在$(a,+\infty)$内有

A. $f(x)>0$.　B. $f(x)>0$.　C. 不能确定$f(x)$的符号.　D. $f(x)$单调趋向于$+\infty$.

↑ a是开区间?. 故不知道$f(x)$在$x=a$处是否连续.

∴ 可能: 

也可能: 

当$x\to 0$时，无穷小量$(1+x)^{x^2}-1$的阶数是.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{x^2}-1}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\ln(1+x)^{x^2}}-1}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2\ln(1+x)}-1}{x^k}$$

$t=x^2\ln(1+x)\to 0$.
$e^t-1\sim t$.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln(1+x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x}{x^k}=1.$$

$\ln(1+x)\sim x,\ x\to 0$

∴ $k=3$.

若$\int_0^x f(t)\,dt=xe^{-x}$，则$\int_1^{+\infty}\frac{f(\ln x)}{x}dx=0$

$$I_5=\int_1^{+\infty}f(\ln x)\,d\ln x.\quad \text{令}t=\ln x,\ \text{则}\ x:1\to+\infty,\ t:0\to+\infty$$

$$=\int_0^{+\infty}f(t)\,dt$$

由$\int_0^x f(t)\,dt=xe^{-x}$两边对$x$求导，得$f(x)=e^{-x}-xe^{-x}$

$$\therefore I_5=\int_0^{+\infty}(e^{-x}-xe^{-x})\,dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}x\,de^{-x}$$

$$=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}+xe^{-x}\Big|_0^{+\infty}+e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=0$$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

设 $f(x)$ 在点 a 的邻域内可导，且 $f(a)=f'(a)=1$. 求 $l=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{\int_a^x f(t)dt}\right)$

$$l=\lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt-x+a}{(x-a)\cdot\int_a^x f(t)dt}\overset{\text{洛}}{=}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{\int_a^x f(t)dt+(x-a)f(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-1}{x-a}}{\frac{\int_a^x f(t)dt}{x-a}+f(x)}$$

∵ 当 $x\to a$ 时，$\frac{\int_a^x f(t)dt}{x-a}\overset{\text{洛}}{=}\frac{f(x)}{1}=f(a)$

且 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

∴ $l=\frac{f'(a)}{f(a)+f(a)}=\frac{1}{2}$.

乙：这后者再洛：$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{f(x)+f(x)+(x-a)f'(x)}$

由于题干未明确 $f'(x)$ 是否在 $x=a$ 处连续，故不可以认为 $\lim_{x\to a}f'(x)=f'(a)$，则无法求商导！

求 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x+y^4}$ 的通解.

乙：看到分子为"单项"，分母为"多项" ⇒ 取倒数.

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2x+y^4}{y}=\frac{2}{y}\cdot x+y^3.$$

∴ $x'-\frac{2}{y}x=y^3$. 有 $a(y)=-\frac{2}{y}\Rightarrow A(y)=-2\ln y$. $b(y)=y^3$.

∴ $x=e^{-A(y)}\cdot\left[\int e^{A(y)}b(y)dy+C\right]=y^2\cdot\left[\int\frac{1}{y^2}\cdot y^3dy+C\right]$

∴ $x=y^2\left(\frac{1}{2}y^2+C\right)$.

KOKUYO
扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$f(x)$满足 $\int_0^x f(t-x)dt = -\frac{x^3}{3}-x^2$，求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围图形绕 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

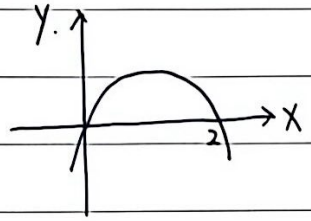
令 $u=t-x$，则 $t=u+x$，$dt=du$.

当 $t:0\to x$，$u:-x\to 0$.

$\therefore \int_0^x f(t-x)dt = \int_{-x}^0 f(u)du = -\frac{x^3}{3}-x^2$. 即 $\int_0^{-x} f(u)du = \frac{1}{3}x^3+x^2$

两边对 x 求导：$-f(-x) = x^2+2x$

令 $p=-x$，则有 $-f(p)=p^2-2p \Rightarrow f(p)=-p^2+2p$ 即 $f(x)=-x^2+2x$.



$$\therefore V=\int_0^2 2\pi x\cdot(-x^2+2x)dx$$
$$=2\pi\cdot\int_0^2(-x^3+2x^2)dx$$
$$=2\pi\cdot\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_0^2=\frac{8\pi}{3}.$$

设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $g(x)\geq 0$，$f(x)>0$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx=\int_0^1 g(x)dx.$$

记 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上最大值为 M，最小值为 m.

则有 $M\geq m>0$.

又 $\because g(x)\geq 0$

$$\therefore \int_0^1 g(x)\sqrt[n]{m}dx\leq\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx\leq\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{M}dx.$$

$\because \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{M}=1$

$\therefore$ 由夹逼定理，$\int_0^1 g(x)\sqrt[n]{f(x)}dx=\int_0^1 g(x)dx$. □

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

$f(x)$在$[0,2]$上二阶可导，且$f'(0)=f'(2)=0$. 试证：$\exists \xi\in(0,2)$，使
$|f''(\xi)| \geq |f(2)-f(0)|$.

在$x_0=0$. $x_0=2$处分别Taylor展开：

$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(\xi_1)}{2}\cdot x^2$. $\xi_1\in[0,x]\subset[0,2]$.

$f(x)=f(2)+f'(2)\cdot(x-2)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\cdot(x-2)^2$. $\xi_2\in[x,2]\subset[0,2]$

两式相减：$0=f(2)-f(0)+\frac{1}{2}[f''(\xi_2)\cdot(x-2)^2-f''(\xi_1)\cdot x^2]$.

$\therefore f(2)-f(0)=\frac{1}{2}[f''(\xi_1)\cdot x^2-f''(\xi_2)\cdot(x-2)^2]$.

加绝对值，取$x=1$

$$|f(2)-f(0)|=\frac{1}{2}\left|f''(\xi_1)\cdot x^2-f''(\xi_2)\cdot(x-2)^2\right|=\frac{1}{2}|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|$$
$$\leq\frac{1}{2}[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|]$$
$$\leq\max\{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|\}$$
$$=|f''(\xi)|.\quad \xi\in(0,2).$$

□.

设函数$f(x)$在$x=a$处可导，则函数$\sqrt[3]{f(x)}$在$x=a$处 C.

A. 可导. B. 不连续 C. 连续但不一定可导. D. 不可导.

①. 取$f(x)=x^3$. $a=0$.

则$\sqrt[3]{f(x)}=x$在$x=0$处连续、可导.

②. 取$f(x)=x$. $a=0$.

则$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{f(0)}}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty$. ← 不存在.

$\therefore\sqrt[3]{f(x)}$在$x=0$处不可导. (但连续).

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$M=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\sin x}\,dx$. $N=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\sec x}\,dx$. $K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\tan x}\,dx$ 则 M,N,K 大小关系为: $M<K<N$.

当 $x\in(0,\frac{\pi}{4})$. $\sin x<1$. $\sec x=\frac{1}{\cos x}>1$.

$\therefore$ 有 $M<N$.

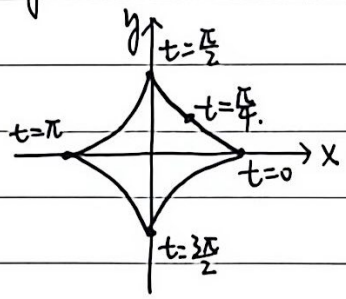
$\because \tan x=\sin x\cdot\sec x$ 且 $\sin x<1$. $\sec x>1$.

$\therefore \tan x<\sec x$. $\tan x>\sin x$

$\Rightarrow K<N$. $K>M$.

曲线 $x=2\cos^3 t$. $y=2\sin^3 t$. $0\le t\le 2\pi$ 的弧长为: 12.

先大致画图:



发现仅需计算 $t=0\sim\frac{\pi}{2}$ 的弧长再 $\times 4$

$$S=4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}|6\sin t\cos t|\,dt=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2t|\,dt$$

$$=-6\cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-6\cdot(-1-1)=12.$$

求 $I=\int_0^{\frac{1}{2}}x\arcsin x\,dx$.

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,dx^2=\frac{1}{2}x^2\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

令 $x=\sin t$. 则 $dx=\cos t\,dt$. $x: 0\to\frac{1}{2}$. $t: 0\to\frac{\pi}{6}$.

$$=\frac{\pi}{48}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t\,dt$$

$$=\frac{\pi}{48}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 t\,dt=\frac{\pi}{48}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$$

$$=\frac{\pi}{48}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right)=\frac{\pi}{48}-\frac{\pi}{24}+\frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{16}-\frac{\pi}{48}.$$

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

求 $y'+\frac{y}{x}=y^2\ln x$ 的通解.

$\Rightarrow \frac{1}{y^2}\cdot y'+\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x}=\ln x$

令 $t=\frac{1}{y}$, 则 $t'=-\frac{1}{y^2}\cdot y'$

$\therefore -t'+t\cdot\frac{1}{x}=\ln x \Rightarrow t'-\frac{1}{x}\cdot t=-\ln x$

$\because a(x)=-\frac{1}{x} \Rightarrow A(x)=-\ln x$

$b(x)=-\ln x$

$\therefore t=e^{-A(x)}\cdot\left[\int e^{A(x)}b(x)\,dx+C\right]=x\cdot\left[-\int\frac{1}{x}\cdot\ln x\,dx+C\right]$

$=x\cdot\left[C-\int\ln x\,d\ln x\right]=x\cdot\left[C-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]$

$\therefore \frac{1}{y}=x\left[C-\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]$.

设 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)\\ e, & x=0\end{cases}$. 求 $f'(x)$. 并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

$\because \lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e=f(0)$

$\therefore f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 连续.

当 $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$: ← 对数求导法 B.

$f'(x)=f(x)\cdot[\ln f(x)]'=(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)\right]'$

$=(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\frac{1}{1+x}\cdot x-\ln(1+x)}{x^2}=(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$

当 $x=0$: $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}e\cdot\frac{e^{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}-1}{x}=e\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}$

记 $t=\frac{\ln(1+x)}{x}-1\to0$ $(x\to0)$.

$\therefore e^t-1\sim t$

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$\therefore f'(0)=e\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ (洛) $=e\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=e\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{-1}{2(1+x)}$

$=-\frac{e}{2}$.

$\because\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}$ (洛)

$=e\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\ln(1+x)-(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}}{2x}$

$=e\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{-\ln(1+x)}{2x}=e\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{-x}{2x}$

$=-\frac{e}{2}=f(0)$.

$\therefore f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上连续.

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导. 且 $f''(x)\le0$. 证明 $\int_a^b f(x)\,dx\ge\frac{(b-a)[f(a)+f(b)]}{2}$.

[法一]. 令 $F(t)=\int_a^t f(x)\,dx-\frac{(t-a)[f(a)+f(t)]}{2}$ 有 $F(a)=0$.

则 $\Leftrightarrow$ 证 $F(b)\ge0$.

$\because F'(t)=f(t)-\frac{1}{2}[f(a)+f(t)+(t-a)f'(t)]=\frac{1}{2}[f(t)-f(a)-(t-a)f'(t)]$

由 Lagrange, $\exists\xi\in(a,t)$ 使 $f'(\xi)=\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\Rightarrow f(t)-f(a)=(t-a)f'(\xi)$

$\therefore F'(t)=\frac{1}{2}[(t-a)f'(\xi)-(t-a)f'(t)]=\frac{1}{2}(t-a)[f'(\xi)-f'(t)]$.

$\because f''(x)\le0$ 且 $\xi<t\Rightarrow f'(\xi)>f'(t)$.

$\therefore F'(t)\ge0\Rightarrow F(t)$ 在 $[a,b]$ 上 $\uparrow$.

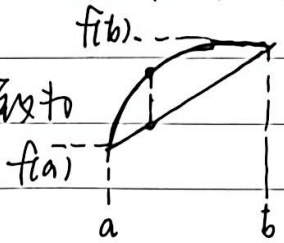
$\therefore F(b)\ge F(a)=0$. 口.

Campus

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

[证明]:

由 $f''(x) \le 0$: 图像向上凸



有: $f[a+t(b-a)] \ge f(a) + t[f(b)-f(a)]$. $t \in [0,1]$.

曲线上的点. 割线上的点.

即 $f[(1-t)a+tb] \ge (1-t)f(a) + tf(b)$.

两边对 t 积分: $\int_0^1 f[(1-t)a+tb]\,dt \ge \int_0^1 (1-t)f(a)\,dt + \int_0^1 tf(b)\,dt$

$= \frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$

对右边: 令 $x=(1-t)a+tb$. 则 $t = \frac{1}{b-a}\cdot x - \frac{a}{b-a}$. $dt = \frac{1}{b-a}dx$

当 $t: 0 \to 1$, $x: a \to b$.

$\therefore \int_a^b f(x)\cdot\frac{1}{b-a}dx \ge \frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$.

用 $a, b, c\cdots$ 表示待定常数. 则二阶微分方程 $y''+y' = x+e^x$ 的一个待定特解的形式可为 $y^* = x(ax+b) + c\cdot e^x$.

特征方程 $r^2+r=0 \Rightarrow r_1=0,\ r_2=-1$. $\therefore Y = C_1 + C_2 e^{-x}$.

$x+e^x$. 叠加原理.

对 x: $y_1^* = ax+b$. 但常数项 b 已包含在 Y 的 C_1. 设 $y_1^* = x(ax+b)$

对 e^x: $y_2^* = c\cdot e^x$

$\therefore y^* = y_1^* + y_2^* = x(ax+b) + c\cdot e^x$.

KOKUYO

扫描全能王 3亿人都在用的扫描App

No.

Date

$y=[\ln(e+x)]^{\frac{1}{1+x}}$. 则 $dy|_{x=0}=\frac{1}{e}dx$.

当 $x=0$, $y=1$.

$y'=y\cdot(\ln y)'=y\cdot\left\{\frac{1}{1+x}\ln[\ln(e+x)]\right\}'=y\cdot\left\{\frac{-1}{(1+x)^2}\ln[\ln(e+x)]+\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{\ln(e+x)}\cdot\frac{1}{e+x}\right\}$

$\therefore dy|_{x=0}=y'|_{x=0}\cdot dx=1\cdot\left\{\frac{-1}{(1+0)^2}\ln[\ln(e+0)]+\frac{1}{1+0}\cdot\frac{1}{\ln(e+0)}\cdot\frac{1}{e+0}\right\}\cdot dx$

$=\left\{-1\cdot 0+1\cdot 1\cdot\frac{1}{e}\right\}dx=\frac{1}{e}dx.$

Campus

CS 扫描全能王 3亿人都在用的扫描App